CÁLCULO VECTORIAL

Introducción

Hasta aquí, hemos estudiado (en este curso) la diferenciación e integración de funciones de dos y tres variables con valores escalares (en un contexto en que los escalares son números reales). A continuación, en cambio, consideraremos funciones que dependen también de dos o tres variables pero toman valores vectoriales (es decir, a cada punto en su dominio de definición le asignan un vector en vez de un número). Estas funciones motivan la definición de nuevas clases de integrales cuyas conexiones con las integrales simples, dobles y triples (con las que ya hemos trabajado) proporcionan varios de los teoremas de mayor importancia teórica y práctica del cálculo vectorial: TEOREMA DE GREEN, TEOREMA DE LA DIVERGENCIA y TEOREMA DE STOKES. Dichos resultados vienen a ser versiones, para dimensiones más altas, del conocido Teorema Fundamental del Cálculo.

Guía de estudio

Al estudiar estos temas, se pueden tomar como guía los contenidos que se mencionan a continuación, donde la numeración de referencia corresponde al libro "Cálculo con Geometría Analítica" (2^a Ed.) de EARL W. SWOKOWSKI (CAPÍTULO 18).

NOTA: *Los ejercicios teóricos propuestos al final de algunas secciones no se evaluarán en los parciales ni en sus recuperaciones, pero sí, posiblemente, en el coloquio para promocionar y en el examen final.*

Sección 18.1: CAMPOS VECTORIALES

Para comprender mejor el concepto siguiente y sus aplicaciones se recomienda observar las figuras 18.1 y 18.2 y leer los comentarios introductorios relativos a las mismas (pág.926).

DEFINICIÓN: Un **campo vectorial en dos dimensiones** es una función $\mathbf{F}$ cuyo dominio D es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y cuyo contradominio es un subconjunto de V_2. Así, si (x, y) está en D, entonces

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\,\mathbf{i} + N(x, y)\,\mathbf{j}$$

donde M y N son funciones escalares de dos variables (las funciones componentes de $\mathbf{F}$).

DEFINICIÓN (18.1): Campo vectorial en tres dimensiones (pág. 926).

Tener presente que en este curso sólo consideraremos **campos vectoriales estacionarios**, es decir, en los que los vectores no dependen del tiempo.

Un campo vectorial puede visualizarse gráficamente eligiendo un conjunto representativo de puntos en su dominio y trazando la flecha que representa al vector imagen de cada uno de ellos con inicio en el punto correspondiente. *Ver* EJEMPLO 1 (pág. 927).

NOTA: El desarrollo teórico de las definiciones y teoremas siguientes se realiza para campos vectoriales tridimensionales, pero la mayoría de ellos (salvo aclaración expresa) son análogos para campos bidimensionales.

- Una clase de campos vectoriales particularmente importantes en física es la conformada por los **campos de variación inversa al cuadrado de la distancia**, especificados en la **DEFINICIÓN (18.2)**, pág. 927-928. *Se recomienda especialmente a los alumnos de Física e Ingenierías leer el* EJEMPLO 2 (pág. 928).
- Otra clase de campos vectoriales de notable interés por sus numerosas aplicaciones teóricas y prácticas, es la de los **campos vectoriales conservativos**, dados en la **DEFINICIÓN (18.3)**, pág. 929. Un campo de esta clase se define mediante el vector gradiente de una función escalar llamada **función de potencial**.

TEOREMA (18.4): establece que la primera de estas clases está incluida en la segunda (pág. 929). *El esquema general de la demostración de este teorema se encuentra a continuación del mismo y los detalles intermedios a completar se proponen como ejercicio teórico para el alumno.*

Recordemos que el operador diferencial vectorial ∇ en tres dimensiones es

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

y al actuar sobre una función escalar $f(x, y, z)$, da como resultado el campo vectorial gradiente de f.

DEFINICIÓN (18.5): Se utiliza ∇ como un operador sobre un campo vectorial $\mathbf{F}$ para definir el **rotacional** de $\mathbf{F}$, otro campo vectorial de singular importancia asociado con $\mathbf{F}$ (pág 930). En **(18.6)** se expresa dicho campo vectorial como un determinante a fin de facilitar la memorización de su fórmula.

Ver EJEMPLO 3 (pág. 931).

NOTA: El rotacional sólo está definido para campos vectoriales tridimensionales (en este caso, no hay análogo bidimensional).

DEFINICIÓN (18.7): Se utiliza nuevamente el operador ∇ sobre un campo vectorial $\mathbf{F}$, pero esta vez para definir la **divergencia** de $\mathbf{F}$, una importante función escalar asociada con $\mathbf{F}$ (pág. 931).

Ver EJEMPLO 4 (pág. 932).

Los operadores *div* (divergencia) y *rot* (rotacional) tienen varias propiedades algebraicas interesantes. Una de ellas se demuestra en el EJEMPLO 5 (pág. 932) y algunas otras se presentarán como ejercicios teóricos.

DEFINICIONES COMPLEMENTARIAS

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\,\mathbf{i} + N(x,y,z)\,\mathbf{j} + P(x,y,z)\,\mathbf{k}.$$

- $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} \mathbf{F}(x,y,z) = \left(\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} M(x,y,z)\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} N(x,y,z)\right)\mathbf{j} + \left(\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} P(x,y,z)\right)\mathbf{k}$, siempre que estos límites de las funciones escalares M, N y P existan.
- $\mathbf{F}$ es continuo en el punto (a,b,c) si $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} \mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{F}(a,b,c)$.

EJERCICIOS TEÓRICOS

Sólo matemáticos: Leer detenidamente y completar los detalles de la demostración del teorema (18.4), pág. 868.

Todas las carreras: 23, 24, 27 y 28 (pág. 933).

Todas las carreras: Demostrar que un campo vectorial es continuo si y sólo si sus funciones componentes lo son.

Sección 18.2: INTEGRALES DE LÍNEA

Supongamos que dos variables, x e y, dependen de una tercer variable t (llamada **parámetro**) por medio de las ecuaciones $x = g(t)$ e $y = h(t)$. Entonces:

- Cada valor de t determina un punto (x, y) que se puede representar en un plano coordenado.
- Cuando t varía de forma continua, el punto $(x, y) = (g(t), h(t))$ también varía y traza una curva C en dicho plano.

La curva C se llama **curva paramétrica** y las dos ecuaciones que describen las coordenadas de sus puntos, **ecuaciones paramétricas** o **parametrización** de C.

- El **sentido** (u **orientación**) **positivo** sobre C es la dirección en que se mueve un punto al aumentar t.
- Cuando la variación de t se restringe a un intervalo $[a, b]$, podemos decir que $(g(a), h(a))$ es el **punto inicial** de C, y $(g(b), h(b))$ es su **punto final**.

NOTA: De manera análoga, se pueden definir curvas paramétricas en el espacio, considerando una tercer ecuación $z = k(t)$. Asímismo, se pueden extender al contexto tridimensional las definiciones y resultados mencionados a continuación.

En esta sección se definen tres clases de integrales que son similares a la integral simple, pero en lugar de integrar sobre un intervalo, se integra sobre la curva (o recta) que genera un parámetro al "recorrer" el intervalo: las integrales "de línea" o "curvilíneas".

DEFINICIÓN: Una curva plana C es **regular** si admite una parametrización

$$x = g(t), \qquad y = h(t); \qquad a \le t \le b,$$

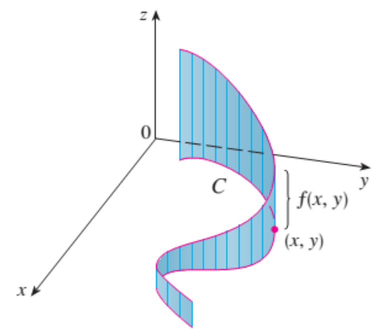
tal que g' y h' son continuas y no se anulan simultáneamente en $[a, b]$. Se dice que C es **regular parte por parte** (o **regular a trozos**) si $[a, b]$ se puede dividir en subintervalos cerrados de modo que C sea regular en cada uno de ellos.

Ahora, se considera una función f de dos variables, x e y, definida en una región D que contiene una curva regular C con una parametrización $x = g(t)$, $y = h(t)$, $a \le t \le b$.

DEFINICIÓN (18.8) y discusión previa: **Integrales de línea de f sobre C** como límites de sumas (pág. 934 y 935).

NOTA: Se puede demostrar (*aunque no lo haremos en este curso*) que cuando f es continua en D, los límites en (18.8) existen y son los mismos para todas las parametrizaciones de C (siempre y cuando tengan la misma orientación).

Interpretación geométrica de la integral definida en (18.8): Cuando $f(x,y) \geq 0$ para todo (x,y) en C, la integral de línea de f sobre C con respecto a la longitud de arco, $\int_C f\,(x,y)\,ds$, da el área de un lado de la "cerca" o "cortina" que tiene por base a C y cuya altura por encima de cada punto (x,y) de C es $f(x,y)$. *Ver figura adjunta a la derecha.*



TEOREMA(18.9): Fórmulas prácticas para evaluar las integrales de línea de f sobre C cuando f es continua en D (pág. 935).

Ver EJEMPLO 1 *y* EJEMPLO 2 (pág. 936).

PROPIEDADES

- Al ser similares a las integrales simples sobre intervalos y poder evaluarse a través de estas (según se indica en (18.9)), las integrales de línea satisfacen propiedades algebraicas semejantes a las de aquellas. Por ejemplo, la integral de una suma de dos funciones es igual a la suma de las integrales de cada función, la integral del producto de una función por una constante es igual al producto de dicha constante por la integral de la función, etc.
- Si $-C$ denota la curva que consiste de los mismos puntos que C, pero con la orientación opuesta, entonces:
  $\int_{-C} f\,(x,y)\,dx = -\int_C f\,(x,y)\,dx$
  $\int_{-C} f\,(x,y)\,dy = -\int_C f\,(x,y)\,dy$
  $\int_{-C} f\,(x,y)\,ds = \int_C f\,(x,y)\,ds$
  siempre que las integrales existan.
- Cuando f es constantemente igual a 1 en C, la integral $\int_C f\,(x,y)\,ds = \int_C ds = \int_a^b \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}dt$ da la longitud de C.

Las definiciones de integrales de línea pueden extenderse a regiones más complicadas.

DEFINICIÓN: Si C es una curva regular parte por parte que se puede expresar como la unión de un número finito de curvas regulares C_1, C_2, ..., C_n, tales que el punto final de C_k es el punto inicial de C_{k+1} para $k = 1, 2, ..., n-1$, las integrales de linea f sobre C se definen como la suma de las integrales de línea correspondientes sobre dichas curvas, siempre que todas las integrales existan. Simbólicamente,

$$\begin{aligned}
\int_C f\,(x,y)\,ds &= \int_{C_1} f\,(x,y)\,ds + \int_{C_2} f\,(x,y)\,ds + ... + \int_{C_n} f\,(x,y)\,ds, \\
\int_C f\,(x,y)\,dx &= \int_{C_1} f\,(x,y)\,dx + \int_{C_2} f\,(x,y)\,dx + ... + \int_{C_n} f\,(x,y)\,dx, \\
\int_C f\,(x,y)\,dy &= \int_{C_1} f\,(x,y)\,dy + \int_{C_2} f\,(x,y)\,dy + ... + \int_{C_n} f\,(x,y)\,dy.
\end{aligned}$$

En **(18.10)** se presenta una aplicación física de una integral de linea: se establece su utilidad para calcular la masa de un alambre, conociendo la función de densidad lineal (masa por unidad de longitud).

NOTACIÓN (importante): Frecuentemente, en las aplicaciones, aparecen integrales de línea con respecto a x y a y combinadas en la forma

$$\int_C f(x,y)\,dx + \int_C g(x,y)\,dy.$$

Cuando esto ocurre, se estila abreviar la suma escribiendo

$$\int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy.$$

INTEGRALES DE LINEA DE CAMPOS VECTORIALES

Una de las aplicaciones más importantes de las integrales de línea a la física tiene que ver con campos de fuerza.

Las consideraciones siguientes se realizan en tres dimensiones, pero son completamente análogas para el caso bidimensional.

Supongamos que la fuerza que actúa sobre cada punto (x, y, z) en el espacio está dada por el campo vectorial tridimensional

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\,\mathbf{i} + N(x,y,z)\,\mathbf{j} + P(x,y,z)\,\mathbf{k},$$

donde M, N y P son funciones continuas. Por otra parte, sea C una curva regular con parametrización

$$x = g(t), \qquad y = h(t), \qquad z = k(t); \qquad a \leq t \leq b.$$

• En **(18.11)** se expresa el **trabajo efectuado por F a lo largo de una curva regular** C (es decir, cuando su punto de aplicación recorre C en dirección al crecimiento de t) en términos de integrales de línea combinadas de funciones escalares. *El alumno interesado puede encontrar los detalles que motivan esta definición en la discusión previa a la misma* (pág. 940).

• En **(18.12)** se expresa el trabajo definido en (18.11) en forma vectorial. Esto es en el sentido de que se utiliza una integral de línea cuya fórmula del integrando está dada mediante un producto punto entre vectores que, además, involucra explícitamente al campo vectorial **F**. Dicha definición establece que "el trabajo es la integral de línea, respecto a la longitud de arco, de la componente tangencial de la fuerza" (pág.941).

Ver EJEMPLO 1 *y* EJEMPLO 2 (pág. 936).

Las integrales de línea que se utilizaron para definir el trabajo realizado cuando F es un campo de fuerza continuo, pueden aplicarse a cualquier campo vectorial continuo, dando lugar a la siguiente definición.

DEFINICIÓN: Sean $\mathbf{F}(x, y, z)$ un campo vectorial continuo definido sobre una curva regular C con parametrización

$$x = g(t), \qquad y = h(t), \qquad z = k(t), \qquad a \leq t \leq b;$$

$\mathbf{T}(x,y,z)$ el correspondiente vector unitario tangente a C en (x,y,z) y $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. La **integral de línea de F a lo largo de** C es

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds.$$

OBSERVACIÓN 1: En la definición anterior se utilizan notaciones abreviadas. Escribiendo la ecuación vectorial para C

$$\mathbf{r}(t)=g(t)\mathbf{i}+h(t)\mathbf{j}+k(t)\mathbf{k}, \qquad a\le t\le b,$$

y denotando por $\mathbf{r}'(t)$ al vector $g'(t)\mathbf{i}+h'(t)\mathbf{j}+k'(t)\mathbf{k}$, se sigue que el vector $\mathbf{T}$, en función de t, es

$$\mathbf{T}(t)=\mathbf{T}\left(g\left(t\right),h\left(t\right),k\left(t\right)\right)=\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

y $d\mathbf{r}=\mathbf{r}'(t)dt$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F}\left(x,y,z\right)\cdot\mathbf{T}\left(x,y,z\right)ds \\
&= \int_a^b \left[\mathbf{F}\left(g\left(t\right),h\left(t\right),k\left(t\right)\right)\cdot\mathbf{T}\left(g\left(t\right),h\left(t\right),k\left(t\right)\right)\right]\sqrt{\left[g'(t)\right]^2+\left[h'(t)\right]^2+\left[k'(t)\right]^2}dt \\
&= \int_a^b \left[\mathbf{F}\left(g\left(t\right),h\left(t\right),k\left(t\right)\right)\cdot\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right]|\mathbf{r}'(t)|\,dt \\
&= \int_a^b \mathbf{F}\left(g\left(t\right),h\left(t\right),k\left(t\right)\right)\cdot\mathbf{r}'(t)dt.
\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 2: La integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de C se puede expresar también mediante integrales de líneas combinadas de sus funciones componentes (como se hizo para los campos de fuerza). En efecto, si

$$\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=M\left(x,y,z\right)\mathbf{i}+N\left(x,y,z\right)\mathbf{j}+P\left(x,y,z\right)\mathbf{k},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}\left(g\left(t\right),h\left(t\right),k\left(t\right)\right)\cdot\mathbf{r}'(t)dt \\
&= \int_a^b \left[M\left(g\left(t\right),h\left(t\right),k\left(t\right)\right)x'(t)+N\left(g\left(t\right),h\left(t\right),k\left(t\right)\right)y'(t)+P\left(g\left(t\right),h\left(t\right),k\left(t\right)\right)z'(t)\right]dt \\
&= \int_a^b M\left(g\left(t\right),h\left(t\right),k\left(t\right)\right)x'(t)dt+N\left(g\left(t\right),h\left(t\right),k\left(t\right)\right)y'(t)dt+P\left(g\left(t\right),h\left(t\right),k\left(t\right)\right)z'(t)dt \\
&= \int_C M\left(x,y,z\right)dx+N\left(x,y,z\right)dy+P\left(x,y,z\right)dz \qquad (\textit{en virtud de } (18.9))
\end{aligned}$$

De las dos observaciones anteriores se desprenden fórmulas útiles en la práctica. *Ver* EJEMPLO 6 *y* EJEMPLO 7 (pág. 941 y 942).

EJERCICIO TEÓRICO

Todas las carreras: Demostrar que si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial tridimensional continuo y C una curva regular con ecuación vectorial $\mathbf{r}(t)=g(t)\mathbf{i}+h(t)\mathbf{j}+k(t)\mathbf{k}$, $a\le t\le b$, entonces

$$\int_{-C}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=-\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

Sección 18.3: INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA

En general, el valor de las integrales de línea definidas en la sección anterior depende de la curva C sobre la cual se integre, aún cuando se consideren curvas que coincidan en sus puntos inicial y final. No obstante, en esta sección se presentan condiciones necesarias y/o suficientes para que esto no suceda en las integrales de línea de los campos vectoriales.

DEFINICIONES

• A una curva regular parte por parte con puntos extremos A y B (en el plano o en el espacio) se le llama **trayectoria** de A a B.

• Se dice que una integral de línea es **independiente de la trayectoria** en cierta región cuando se obtiene el mismo valor para todas las trayectorias contenidas en dicha región que tengan los mismos puntos inicial y final.

El desarrollo teórico se realiza en dos dimensiones, pero es análogo para el caso tridimensional.

OBSERVACIONES

Si $f\ (x,y)$ es una función escalar:

• $\int_C f\,(x,y)\,ds$ no puede ser independiente de la trayectoria en ninguna región abierta (pensar en la interpretación geómetrica de esta integral).

• $\int_C f\,(x,y)\,dx = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}\,(x,y) = f\ (x,y)\,\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$, mientras que $\int_C f\,(x,y)\,dy = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}\,(x,y) = 0\mathbf{j} + f\ (x,y)\,\mathbf{j}$.

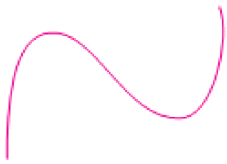
Por lo tanto:

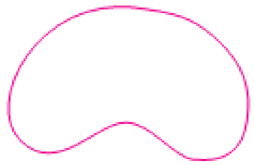
La teoría sobre independencia de la trayectoria, aunque involucra campos escalares, se refiere fundamentalmente a integrales de línea de campos vectoriales.

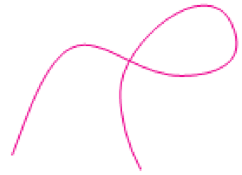
NOTACIÓN: Si la integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y)$ es independiente de la trayectoria en una determinada región, y C representa cualquier trayectoria (curva regular parte a parte) contenida en la misma, con punto inicial A y punto final B, se puede reemplazar la notación $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ por $\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, ya que el valor de la integral depende sólo de los puntos A y B (y no de la curva o trayectoria que los une).

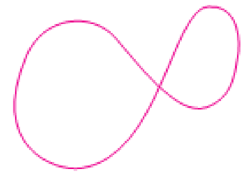
Para entender mejor los resultados que siguen, conviene recordar lo siguiente:

- Una curva C en el plano (o en el espacio) es
  - **cerrada**, si su punto inicial coincide con su punto final;
  - **simple**, si no se corta a sí misma en ninguna parte de su "recorrido".

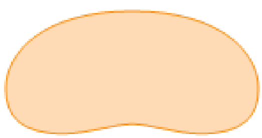

simple, no cerrada

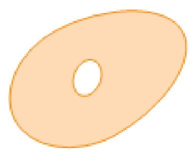

simple, cerrada

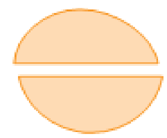

no simple, no cerrada


no simple, cerrada

- Una región D en el plano (o en el espacio) es
  - **abierta**, si para todo punto A de D existe un disco (de radio mayor que 0) con centro A completamente contenido en D;
  - **conexa**, si todo par de puntos A y B de D se pueden unir por una curva regular parte por parte (trayectoria) completamente contenida en D;
  - **simplemente conexa**, si el interior de toda curva cerrada simple C contenida en D contiene sólo puntos de D (no hay "hoyos" en la región).


simplemente conexa (y conexa)


conexa, no simplemente conexa


no conexa (ni simplemente conexa)

Ahora, con estas definiciones en mente, se pueden considerar los resultados referenciados a continuación.

TEOREMA (18.13), pág. 946: Caracterización de los campos vectoriales continuos cuya integral de línea es independiente de la trayectoria en regiones abiertas y conexas. *La demostración de este teorema se encuentra a continuación del mismo y podría ser evaluada, total o parcialmente, en un examen final o coloquio para promocionar.*

De la segunda parte de la demostración del teorema anterior surge un método para evaluar integrales de línea que son independientes de la trayectoria, bajo las hipótesis generales establecidas en éste. Dicho método se resume en el **TEOREMA (18.14)**, pág. 947. NOTA: Este resultado suele llamarse "**teorema fundamental de las integrales de línea**", por su semejanza práctica con el conocido "teorema fundamental del cálculo" en una variable.

El siguiente resultado, que se obtiene como consecuencia del teorema (18.13) y el teorema de Clairaut, propone un método para descartar fácilmente que la integral de un campo vectorial continuo en una región abierta y conexa sea independiente de la trayectoria.

TEOREMA (*): Si la integral

$$\int_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

es independiente de la trayectoria en una región abierta y conexa D, en la cual $M(x,y)$ y $N(x,y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces, en la totalidad de D,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La demostración correspondiente se propone como ejercicio teórico para el alumno.

OBSERVACIÓN (importante): La igualdad concluída en el teorema anterior sirve también como método para descartar, bajo las hipótesis generales indicadas en dicho teorema, que el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = M(x,y)\,\mathbf{i} + N(x,y)\,\mathbf{j}$ sea conservativo (ya que, en tales condiciones, esto equivale a la independencia de la trayectoria de sus integrales de línea, por teorema (18.13)).

El recíproco del teorema (*) es falso, a menos que se impongan condiciones adicionales al dominio D de M y N. En particular, para el caso en que D es una región simplemente conexa, se establece la equivalencia en el **TEOREMA (18.16)**, pág. 948. *La demostración de la implicación faltante se omite en este curso y podría obtenerse más adelante como una consecuencia del Teorema de Green.*

Leer EJEMPLO 2, pág. 949.

NOTA: En el EJERCICIO 17 de la pág. 953 se enuncia la versión tridimensional del TEOREMA (*). Con su recíproco ocurre lo mismo que para el caso bidimensional. A continuación, se enuncia el análogo tridimensional del TEOREMA (18.16), que establece la equivalencia correspondiente bajo la hipótesis adicional de que el dominio de $\mathbf{F}$ sea una región simplemente conexa.

TEOREMA: Si las funciones $M(x,y,z)$**,** $N(x,y,z)$ y $P(x,y,z)$ tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta simplemente conexa $D \subseteq \mathbb{R}^3$, entonces la integral de línea

$$\int_C M(x,y,z)\,dx + N(x,y,z)\,dy + P(x,y,z)\,dz$$

es independiente de la trayectoria en D si y sólo si, sobre toda D,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},\ \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

La demostración de la primer implicación ($\Rightarrow$) de este teorema es similar a la de dos dimensiones. La demostración de la otra implicación ($\Leftarrow$) requiere del Teorema de Stokes (que se estudiará más adelante) y se omite en este curso.

OBSERVACIÓN: Si $\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\,\mathbf{i} + N(x,y,z)\,\mathbf{j} + P(x,y,z)\,\mathbf{k}$, el cumplimiento simultáneo de las tres igualdades del teorema anterior equivale a la condición de que $rot\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Finalmente, para ilustrar la teoría de esta sección con algunas aplicaciones, en la pág. 952 se presenta la **DEFINICIÓN (18.17)**, de **energía potencial**, y se enuncia en **(18.8)** la ley fundamental de la física, que constituye la razón principal por la que ciertos campos vectoriales se llaman conservativos: la **LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA**. *Estos conceptos son de particular interés para los alumnos de carreras de Física e Ingenierías.*

EJERCICIO TEÓRICO

Todas las carreras: Demostrar el TEOREMA (*). *Sugerencia:* ver la discusión previa al teorema (18.16), pág.948.

Sección 18.4: TEOREMA DE GREEN

A grandes rasgos, el Teorema de Green establece una relación entre una integral de línea a lo largo de cierta clase de curva plana cerrada y una integral doble sobre la región (plana) encerrada por dicha curva. En los ejemplos de esta sección se ilustra su utilidad práctica para simplificar, en muchos casos, el cálculo de las integrales involucradas.

TEOREMA DE GREEN (18.19), pág. 954**:** Sea C una curva plana, regular parte por parte, simple y cerrada, con orientación positiva (recorrida en sentido antihorario). Sea R la región en el plano xy que consta de C y de todos los puntos "encerrados" por C. Si $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones (escalares) que tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta D que contiene a R, entonces

$$\int_C M\,(x,y)\,dx + N\,(x,y)\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}N\,(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M\,(x,y)\right] dA.$$

La demostración correspondiente se omite en este curso (y no se evaluará). No obstante, se recomienda especialmente a los alumnos de carreras en matemática leer la demostración dada en las pág. 954-955 para el caso especial en que R es una región tanto de tipo I como de tipo II.

Leer EJEMPLO 1, pág. 955-956.

NOTA (IMPORTANTE)**:** El teorema de Green puede generalizarse al caso en que R es una unión finita y contigua de regiones cuyas fronteras satisfacen sus hipótesis e incluyen segmentos horizontales y/o verticales. *Para comprender mejor esto, se recomienda leer la discusión de la pág. 955 (anterior al ejemplo 1). Dicha versión más general debe ser tenida en cuenta en este curso por su* **utilidad práctica***, pero su demostración está fuera del alcance del mismo.*

Leer EJEMPLO 2, pág. 956.

El EJEMPLO 3 (pág. 956) exhibe claramente un caso en el que el teorema de Green permite simplificar el cálculo de una integral de línea. En efecto, evaluar directamente la integral de línea requerida implicaría parametrizar cuatro curvas (cuya unión es C) y luego evaluar y sumar las integrales de línea correspondientes a lo largo de cada una de ellas. En cambio, la integral doble equivalente se resuelve fácilmente mediante una sustitución por coordenadas polares.

El teorema de Green permite también deducir varias fórmulas para calcular, mediante integrales de línea bastante sencillas, el área de cualquier región plana delimitada por una curva que satisfaga las hipótesis correspondientes (regular parte por parte, simple y cerrada). Dichas fórmulas se establecen en el **TEOREMA (18.20)**, pág. 957. *La deducción de las mismas se propone como ejercicio teórico para el alumno.*

Leer EJEMPLO 4, pág. 957.

NOTA: El teorema de Green puede generalizarse para ser aplicado a regiones con hoyos (es decir, regiones que no son simplemente conexas), siempre que se integre sobre toda la curva frontera de tales regiones manteniendo estas a la izquierda de dicha curva (*observar* FIGURA 18.35, pág. 958). *En este curso no estudiaremos esta versión más general del teorema de Green, pero el alumno interesado en ella puede analizar el ejemplo 5 de la pág. 958 y los comentarios previos para adquirir una idea de la misma.*

EJERCICIO TEÓRICO

Todas las carreras: Demostrar el TEOREMA (18.20). *Sugerencia:* ver los comentarios previos al enunciado de dicho teorema (pág. 957).

Sección 18.5: INTEGRALES DE SUPERFICIE

• Las **integrales dobles** se definen sobre regiones en dos dimensiones (regiones planas).

• Las **integrales de línea** se evalúan a lo largo de curvas bidimensionales (que, podríamos decir, constituyen los "contornos" de las regiones planas, o parte de ellos) y también sobre curvas tridimensionales.

• Las **integrales triples** se definen sobre regiones en tres dimensiones (sólidos).

• Las **integrales de superficie**, como su nombre lo indica, se evalúan sobre superficies (es decir, sobre las "cáscaras" de los sólidos, o parte de ellas)

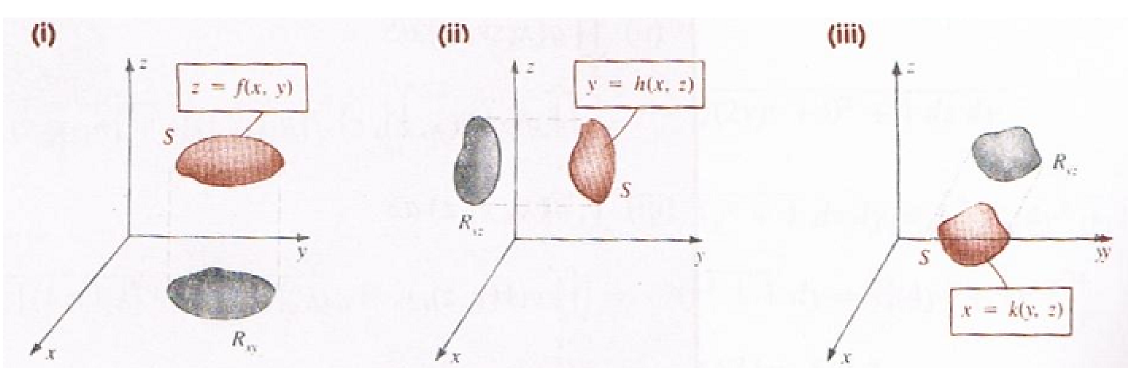
Si S es una superficie parametrizable y g, una función de tres variables cuyo dominio contiene a S, se define la integral de superficie de g sobre S de tal forma que, en el caso en que $g(x, y, z) = 1$, el valor de dicha integral sea igual al área superficial de S [ya definida en (17.15)].

Si la proyección de una superficie S sobre alguno de los planos coordenados es una región elemental (de tipo I o de tipo II) o unión finita de tales regiones, se dice que S tiene una **proyección regular** sobre el plano coordenado correspondiente. Entonces, se pueden considerar tres casos:

(i) Si S tiene una proyección regular sobre el plano xy, dicha región se denotará por R_{xy} y se supondrá que S es la gráfica de una ecuación de la forma $z = f(x, y)$.

(ii) Si S tiene una proyección regular sobre el plano xz, dicha región se denotará por R_{xz} y se supondrá que S es la gráfica de una ecuación de la forma $y = h(x, z)$.

(iii) Si S tiene una proyección regular sobre el plano yz, dicha región se denotará por R_{yz} y se supondrá que S es la gráfica de una ecuación de la forma $x = k(y, z)$.



NOTA: Los casos anteriores no son excluyentes, pues hay superficies que tienen proyecciones regulares sobre más de un plano coordenado.

Para simplificar el objetivo de adquirir nociones básicas sobre este tema, en este curso se restringirá la atención a superficies de la clase antes descripta, es decir, que satisfagan al menos uno de los casos (i) a (iii). Además, se supondrá que la función f, h o k (según el caso correspondiente) tiene **primeras derivadas parciales continuas** en la región R_{xy}, R_{xz} o R_{yz}, respectivamente (según corresponda).

En **(18.22)** se define la **integral de superficie de una función** $g(x, y, z)$ **sobre una superficie** S del tipo descripto en (i) como un límite de sumas cuando la norma de las particiones tiende a 0 (para los otros casos es análoga). *A esta definición se puede llegar por un método semejante al que se utilizó en el Capítulo 17 para definir el área A de S. El alumno interesado en los detalles de la misma puede repasar la derivación de la definición (17.14), pág. 888, y ajustarla considerando los comentarios previos a (18.22), pág. 962 (dichos detalles no se evaluarán en este curso).*

OBSERVACIÓN: Si $g(x, y, z) = 1$ para todo (x, y, z) en S, la integral en (18.22) se reduce a la definida en (17.14).

NOTA: Si S es la unión de varias superficies de las clases antes descriptas (unión disjunta, salvo posiblemente en el límite entre una y otra), la integral de superficie sobre S se define como la suma de las integrales de superficie individuales.

El **TEOREMA (18.23)**, pág. 962, proporciona fórmulas prácticas para evaluar las integrales de superficie según los casos (i) a (iii).

El desarrollo de estas fórmulas es similar al de la fórmula (17.15), pág. 889 (se omitirá en este curso).

OBSERVACIÓN: Si $g(x, y, z) = 1$ para todo (x, y, z) en S, la fórmula (i) en (18.23) se reduce a la establecida en (17.15) para calcular el área de S.

Leer EJEMPLO 1 y EJEMPLO 2, pág. 963.

INTEGRALES DE SUPERFICIE DE CAMPOS VECTORIALES

En la sección 18.2 se definieron integrales de línea de campos vectoriales y se vió que una de las aplicaciones más importantes de las integrales de línea a la física tiene que ver con campos de fuerza, ya que permiten calcular el trabajo realizado a lo largo de una curva regular C (recordar (18.12), pág. 941. Ahora se consideran integrales de superficie de campos vectoriales y su correspondiente interpretación física cuando se trata de campos de fuerza.

DEFINICIÓN (18.24), pág 965: Sea $\mathbf{F}(x, y, z)$ un campo vectorial tridimensional continuo sobre una superficie S. Sea $\mathbf{n}(x, y, z)$ un vector unitario normal a S en el punto (x, y, z). Si las componentes de $\mathbf{n}$ son funciones (escalares) continuas de x, y y z, la **integral de superficie de F sobre** S es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

OBSERVACIÓN: En la definición anterior, al igual que $\mathbf{F}$, $\mathbf{n}$ es una función con valores vectoriales cuyo dominio está contenido en $\mathbb{R}^3$, luego, en cada punto (x, y, z) de S, el producto $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ produce un número real, de modo que el integrando es una función escalar. Además, el hecho de que tanto $\mathbf{F}$ como $\mathbf{n}$ sean campos continuos sobre S, garantiza que dicha función es también continua sobre S.

Para evaluar la integral anterior, se debe tener en cuenta que si S es la gráfica de una ecuación de la forma $z = f(x, y)$, y se define $g(x, y, z) = z - f(x, y)$, entonces

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g(x,y,z)}{\|\nabla g(x,y,z)\|} = \frac{-f_x(x,y)\mathbf{i} - f_y(x,y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2 + 1}}.$$

Asimismo, se pueden establecer fórmulas semejantes cuando S está dada por una ecuación de la forma $y = h(x, z)$ o $x = k(y, z)$.

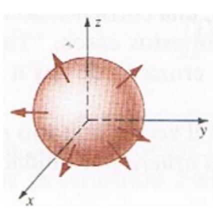
NOTA: El vector $\mathbf{n}$ antes formulado para el caso en que $z = f(x, y)$ es el **vector normal superior** a S en (x, y, z), porque su tercer componente es positiva. El **vector normal inferior** es $-\mathbf{n}$.

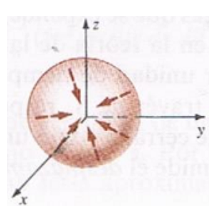
Tener presente que, en lo que resta de este CAPÍTULO, se supone que toda superficie S está **orientada**(o es **orientable**) en el sentido siguiente:
- Existe un vector normal unitario $\mathbf{n}$ en cada punto (x, y, z) de S que no está en la frontera de S.
- Las componentes de $\mathbf{n}$ son funciones continuas de x, y y z ($\mathbf{n}$ varía continuamente sobre S).

Además, se supone que S es **bilateral**:
- Si S tiene ecuación $z = f(x, y)$, serían el "lado de arriba" y el "lado de abajo" de su gráfica.
- Si S es una superficie cerrada (como una esfera), serían la "parte de afuera" y la "parte de adentro".

(Un ejemplo de superficie unilateral se conoce como cinta de Möbius. *El alumno interesado en más detalles puede observar la* figura 18.46 *y leer los comentarios que la acompañan, pág.* 965-966).

NOTA: En el último caso (cuando S es una superficie cerrada) se habla de **vector normal exterior** o **vector normal interior**, según corresponda.


vectores normales exteriores


vectores normales interiores

INTERPRETACIÓN FÍSICA: La integral de superficie de $\mathbf{F}$ sobre S es llamada muchas veces **integral de flujo de F sobre** S, ya que puede interpretarse físicamente como el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}$ a través de la superficie S. En esta interpretación $\mathbf{F}$ representa el **campo de velocidad** de un fluido (líquido, gas, corriente eléctrica, etc) y el **flujo** es el volumen de fluido que cruza S por unidad de tiempo. *Para entender mejor esto, se recomienda leer la discusión previa a la* DEFINICIÓN (18.25), pág. 966. *Ver* EJEMPLO 4 (pág. 941 y 942).

NOTA: Cuando S es una superficie cerrada (como una esfera) y el vector normal $\mathbf{n}$ utilizado en la integral de flujo es exterior, entonces su valor (el flujo) mide el desplazamiento neto (del fluido) hacia afuera por unidad de tiempo. En este caso:

- Si es positivo, el flujo hacia afuera de S es mayor que el flujo hacia adentro y se dice que hay una **fuente** (del fluido) dentro de S.

- Si es negativo, el flujo hacia afuera de S es menor que el flujo hacia adentro y se dice que hay un **sumidero** (del fluido) dentro de S.