CALCULO 2: Ejercicios resueltos (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

Sección 18.5: Integrales de Superficie (Pág. 968): 1, 3, 5, 7, 13, 15

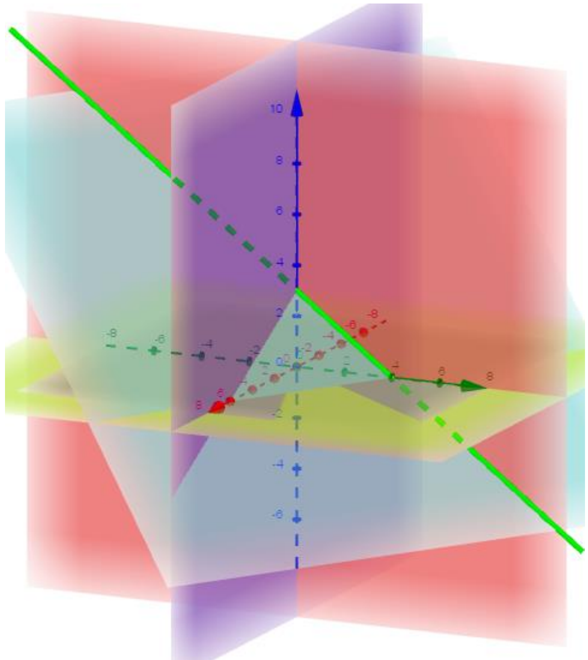
Realizaremos el ejercicio 5. La única diferencia con el 1 y el 3 es que en estos pide resolver, y en el 5 solo plantear.

Ejercicio 5: Plantee, pero no evalúe, la integral de superficie usando la proyección de S sobre (a) el plano *yz* y (b) el plano *xz*

$\iint_S \; xy^2z^3 \; dS$; S es la parte del plano $2x + 3y + 4z = 12$ contenida en el primer octante.

En la figura, el plano dado está pintado en celeste, y los planos coordenados en rosa, lila y amarillo. El triángulo que queda entre ellos (en celeste) es la superficie con la que estamos trabajando.

La recta verde es la proyección de esta superficie sobre el plano *yz*, tal como lo pide el item (a)



(a) Usaremos el Teorema 18.23 (iii) ya que nos pide proyectar la superficie S sobre el plano *yz*.

$$\iint_S g(x,y,z)\, dS = \iint_{R_{yz}} g(k(y,z),y,z) \sqrt{\left[k_y(y,z)\right]^2 + [k_z(y,z)]^2 + 1}\; dA$$

En este caso tenemos $g(x,y,z) = xy^2z^3$, y para poder aplicar el teorema necesitamos hallar $k(y,z)$ la cual sale de despejar *x* del plano:

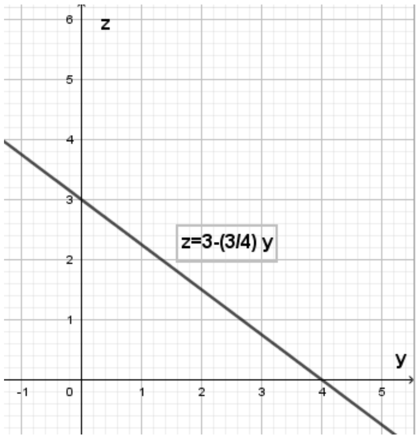
$2x + 3y + 4z = 12 \quad \rightarrow \quad x = k(y,z) = 6 - \frac{3}{2}y - 2z.$

Necesitamos también sus derivadas parciales: $k_y = -\frac{3}{2}$ y $k_z = -2$

Reemplazando

$g(k(y,z),y,z) = \left(6 - \frac{3}{2}y - 2z\right)y^2z^3 \qquad$ y $\qquad \sqrt{\left[-\frac{3}{2}\right]^2 + [-2]^2 + 1} = \frac{\sqrt{29}}{2}$

Con esto ya tenemos el integrando. Ahora veamos los límites de integración: hemos proyectado la región sobre el plano *yz*, es decir $x = 0$. Reemplazando esto en la ecuación del plano, vemos que la recta de intersección es $z = 3 - \frac{3}{4}y$ (marcada en verde en el gráfico anterior). Dibujándola en el plano yz tenemos



Y de esta región, considerándola de tipo 1, sacaremos los límites de integración:

$0 \leq y \leq 4$ y $0 \leq z \leq 3 - \frac{3}{4}y$

Entonces:

$$\iint_S xy^2z^3 \, dS = \int_0^4 \int_0^{3-\frac{3}{4}y} \left(6 - \frac{3}{2}y - 2z\right) y^2z^3 \, \frac{\sqrt{29}}{2} \, dzdy$$

(b) Análogamente, usaremos el Teorema 18.23 (ii) ya que nos pide proyectar la superficie S sobre el plano *xz*.

$$\iint_S g(x,y,z) \, dS = \iint_{R_{xz}} g(x, h(x,z), z) \sqrt{[h_x(x,z)]^2 + [h_z(x,z)]^2 + 1} \, dA$$

En este caso tenemos $g(x,y,z) = xy^2z^3$, y para poder aplicar el teorema necesitamos hallar $h(x,z)$ la cual sale de despejar *y* del plano:

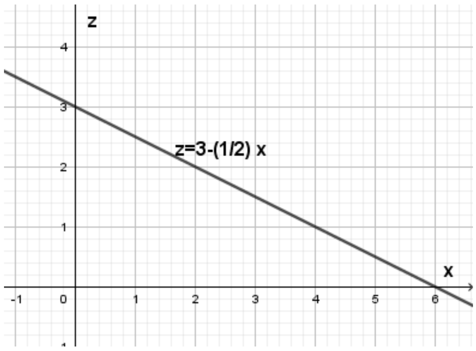
$2x + 3y + 4z = 12 \quad \rightarrow \quad y = h(x,z) = 4 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}z.$

Necesitamos también sus derivadas parciales: $h_x = -\frac{2}{3}$ y $h_z = -\frac{4}{3}$

Reemplazando

$g(x, h(x,z), z) = x\left(4 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}z\right)^2 z^3$ y $\sqrt{\left[-\frac{2}{3}\right]^2 + \left[-\frac{4}{3}\right]^2 + 1} = \frac{\sqrt{29}}{3}$

Con esto ya tenemos el integrando. Ahora veamos los límites de integración: hemos proyectado la región sobre el plano *xz*, es decir $y = 0$. Reemplazando esto en la ecuación del plano, vemos que la recta de intersección es $z = 3 - \frac{1}{2}x$. Dibujándola en el plano yz tenemos



Y de esta región, considerándola de tipo 2, sacaremos los límites de integración:

$0 \leq x \leq 6 - 2z$ y $0 \leq z \leq 3$

Entonces:

$$\iint_S xy^2z^3\, dS = \int_0^3 \int_0^{6-2z} x\left(4 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}z\right)^2 z^3\, \frac{\sqrt{29}}{3}\, dxdz$$

Aclaraciones:

- Al proyectar la superficie sobre uno de los planos coordenados, la elección de dicho plano, si no me especifican, será determinada según conveniencia en ver las regiones. Hay superficies que proyectadas sobre uno de los planos quedan muy rebuscadas para plantear, pero sobre otro, quedan mucho más simple.
- Una vez hecha la proyección, la elección de verla como tipo 1 o tipo 2 depende de cada uno.
- Es posible que tenga que usar coordenadas polares en algunas regiones.

Ejercicio 13: Calcule $\iint_S\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$, donde **n** es el vector unitario normal superior de S:

$\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; S es la parte del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

Primero hallaremos **n** siguiendo la explicación de la página 965:

Tenemos la superficie del cono, dada por $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. De aquí obtenemos que

$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\quad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\quad {f_x}^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2}$; $\quad {f_y}^2 = \frac{y^2}{x^2+y^2}$.

Luego $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right]$ y $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{5y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 3\right]$.

Luego $\iint_S\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_S \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{5y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 3\right] dS$. Aplicando el teorema 18.23 (i) (Porque al cono lo hemos expresado de la forma $z = f(x,y)$), y haciendo cambio de coordenadas a polares, tenemos

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{5y}{\sqrt{x^2+y^2}}+3\right]dS$$

$$= \iint_{R_{xy}} \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{5y}{\sqrt{x^2+y^2}}+3\right]\sqrt{2}\,dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[-\frac{2\,r\,cos\theta}{r}-\frac{5\,r\,sen\theta}{r}+3\right] r\,dr\,d\theta = 3\pi$$

Note que al proyectar la superficie sobre el plano *xy* obtuvimos un círculo de radio 1, esto nos llevó a definir los límites de la integral doble.