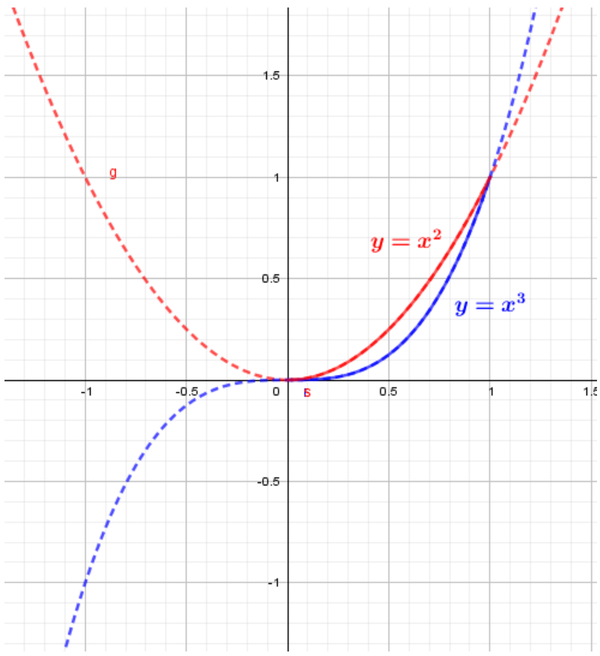
CALCULO 2: Ejercicios resueltos (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

Sección 18.4: Teorema de Green (Pág. 960): 1, 2, 3, 5, 7, 10, 13, 15, 17, 18

Ejercicio 2: Use el Teorema de Green para evaluar la integral de línea:

$\oint_C (x+y^2)\,dx + (1+x^2)dy$, donde C es la curva cerrada dada por $y = x^3$, y $y = x^2$, de $(0,0)$ a $(1,1)$

Primero identifiquemos la curva regular cerrada simple (y su interior) sobre la que trabajaremos. La misma se muestra en la figura. (Está trazada en línea punteada la función completa y en trazo continuo el tramos que nos interesa)



Para aplicar el Teorema de Green, identifiquemos:

$$M = x + y^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y$$

$$N = 1 + x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

Nos piden calcular la integral de línea $\oint_C (x+y^2)\,dx + (1+x^2)dy$, usando el teorema de Green.

El Teorema de Green (18.19) Relaciona una integral de línea sobre una curva regular cerrada simple, con una integral doble, mediante la igualdad $\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA.$

En este caso $\oint_C (x+y^2)\,dx + (1+x^2)dy = \iint_R (2x-2y)\,dA$. Una vez expresada la integral doble, los límites de esta los obtenemos mirando la región como Tipo 1 o Tipo 2, según sea conveniente. En ese caso, nuestra región la veremos como una región Tipo 1:

$$\oint_C (x+y^2)\,dx + (1+x^2)dy = \iint_R (2x-2y)\,dA = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} 2x - 2y\;dy\,dx = \frac{3}{70}$$

Los detalles de las cuentas no se especifican, ya que a esta altura todos deben estar familiarizados con cómo resolver una integral doble.

Aunque el ejercicio no lo pida, es bueno, aunque sea una vez, calcular la integral de línea directamente y ver que llegamos a lo mismo. Les dejaremos las indicaciones para esto, los detalles de la resolución se desarrollaron en la sección 18.2:

Si quiero trabajar con la integral de línea directamente, tengo que considerar dos curvas a parametrizar: $C_1: y = x^3$, y $C_2: y = x^2$.

Nos queda $C_1: \begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases} \quad \begin{matrix} dx = dt \\ dy = 3t^2 dt \end{matrix} \quad con\ 0 \leq t \leq 1$ y

$$C_2: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} dx = dt \\ dy = 2t\,dt \end{matrix} \quad con\ 0 \leq t \leq 1$$

Con esto,

$$\oint_C (x + y^2)\,dx + (1 + x^2)dy = \int_{C_1} (t + t^6)dt + (1 + t^2)3t^2 dt - \int_{C_2} (t + t^4)dt + (1 + t^2)2t\,dt$$

Queda para el alumno terminar los detalles de las cuentas y verificar el resultado con lo hecho antes

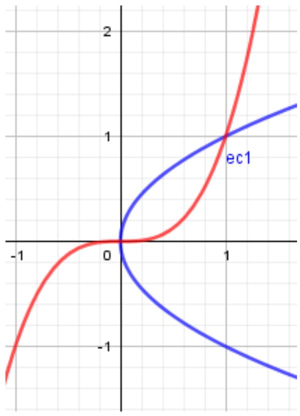
Aclaración:

- El signo negativo (-) antes de la integral sobre C_2 es porque si recorro y encierro la región, manteniendo ésta a mi izquierda, el parámetro no variaría de 0 a 1, sino, desde 1 a 0, ese cambio de dirección lo indica el signo negativo.
- Ya con tener que parametrizar dos curvas, podemos darnos cuenta el beneficio del Teorema de Green. En este caso la integral de línea no sale con tantas complicaciones, pero sí, con muchas más cuentas que la integral doble.

Ejercicio 18: Use el Teorema 18.20 para calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas: $y = x^3$, y $y^2 = x$

El Teorema de Green nos lleva al Teorema 18.20, el cuál no da tres formas para hallar el área de la región pedida. Usaremos la última, con cualquiera de ellas llegaremos al mismo resultado.

En la figura se muestra la región. Al igual que en el ejercicio anterior tendremos que parametrizar ambas curvas:



$$C_1: \begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases} \quad \begin{matrix} dx = dt \\ dy = 3t^2 dt \end{matrix} \quad con\ 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases} \quad \begin{matrix} dx = 2t\,dt \\ dy = dt \end{matrix} \quad con\ 0 \leq t \leq 1$$

Según el Teorema 18.20 y teniendo en cuenta que $C = C_1 \cup C_2$:

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\oint_{C_1} x\,dy - y\,dx - \frac{1}{2}\oint_{C_2} x\,dy - y\,dx$$

Calculemos por separado:

$$\frac{1}{2}\oint_{C_1} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 t\,3t^2 dt - t^3\,dt = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\oint_{C_2} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 t^2 dt - t\,2t\,dt = -\frac{1}{3}$$

Luego el área pedida es $\frac{1}{2}\oint_{C_1} x\,dy - y\,dx - \frac{1}{2}\oint_{C_2} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12}$.

Queda para el alumno usar las otras fórmulas proporcionadas por el Teorema 18.20 y verificar el resultado obtenido.