CALCULO 2: Ejercicios resueltos (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

Sección 18.3: Independencia de la trayectoria (Pág. 952): 1, 3, 5, 6. 9, 11, 12, 13, 14

Ejercicio 1: Determine si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria. Si lo es, encuentre una función de potencial f para **F**.

$$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y + 2)\mathbf{i} + (x^3 + 4y^3)\,\mathbf{j}$$

La integral de línea que nos piden podemos expresarla mediante la siguiente igualdad:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

Determinaremos si es independiente de la trayectoria o no, recurriendo al Teorema 18.16, considerando $M(x, y) = 3x^2y + 2$ y $N(x, y) = x^3 + 4y^3$ (Estamos en una región simplemente conexa, ya que el dominio de este campo es todo R^2).

Calculemos las derivadas parciales correspondientes: $\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$. Como vemos, ambas son iguales. Aplicando el teorema concluimos que la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria.

Según el Teorema 18.13 (el cual podemos aplicar porque el campo que nos dan es continuo, ya que cada función componente lo es, por ser polinomios; el dominio de estos polinomios, y por lo tanto del campo, es todo R^2, que es una región simplemente conexa), como ya vimos que es independiente de la trayectoria, existe una función potencial f para **F** tal que $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$.

Hallaremos la función potencial siguiendo la idea de la demostración de este Teorema:

Para que $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ debe cumplirse que $\begin{cases} 3x^2y + 2 = f_x(x, y) & (1) \\ x^3 + 4y^3 = f_y(x, y) & (2) \end{cases}$

Tomemos la ecuación (1) e integremos con respecto a *x*:

$f_x(x, y) = 3x^2y + 2 \quad \rightarrow \quad f(x, y) = \int 3x^2y + 2\, dx = x^3y + 2x + g(y).$

Esta *g(y)* viene a cumplir el papel de la constante cuando trabajamos con integrales indefinidas, solo que aquí al integrar parcialmente, debemos considerarla como función que depende de la otra variable.

Una vez hecho esto tomamos la función hallada $f(x, y) = x^3y + 2x + g(y)$ y derivamos con respecto a la otra variable, *y*: $f_y(x, y) = x^3 + g'(y)$ y aplicando (2) debe cumplirse que

$$x^3 + 4y^3 = x^3 + g'(y)$$

De aquí $4y^3 = g'(y)$. Para hallar $g(y)$ debemos integrarla respecto de y:

$$g(y) = \int 4y^3 dy = y^4 + k.$$

Recopilando todo esto, la función de potencial pedida es $f(x,y) = x^3y + 2x + y^4 + k$.

Aclaración:

- Siempre es conveniente determinar primero si la integral es independiente de la trayectoria, para luego pasar a buscar la función potencial, antes que empezar directamente a hacer las cuentas. Podemos perder mucho tiempo para llegar a que esta función potencial no existe.
- Da lo mismo empezar por la ecuación (1) que hacerlo por la (2). En ese caso integraremos primero con respecto a y y derivaremos luego con respecto a x.
- Siempre podemos verificar la función potencial hallada, haciendo las derivadas parciales, éstas deben coincidir con las funciones componentes del campo.

Ejercicio 12: Demuestre que la integral de línea es independiente de la trayectoria y calcule su valor

$$\int_{(0,0)}^{(1,\frac{\pi}{2})} e^x seny\, dx + e^x cosy\, dy$$

Demostrar la independencia de la trayectoria y encontrar su función potencial es totalmente análogo al ejercicio anterior (queda para el alumno hacerlo).

Nos centraremos en encontrar su valor usando el Teorema 18.14, lo cual podemos hacerlo ya que es un campo continuo en una región simplemente conexa.

Según el Teorema 18.14, si $\mathbf{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$ entonces

$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1)$$

En nuestro caso tenemos que la función potencial es $f(x,y) = e^x seny + k$ (verificar esto), y

$(x_2,y_2) = (1,\frac{\pi}{2})$ y $(x_1,y_1) = (0,0)$. Por lo tanto:

$$\int_{(0,0)}^{(1,\frac{\pi}{2})} e^x seny\, dx + e^x cosy\, dy = f\left(1,\frac{\pi}{2}\right) - f(0,0) = e$$