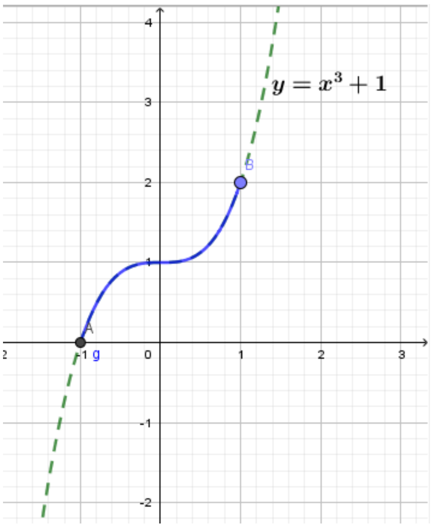
CALCULO 2: Ejercicios resueltos (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

Sección 18.2: Integrales de Línea (Pág. 943): 1, 3, 5, 7, 9, 13, 18, 19

Ejercicio 3: Evalúe la integral de línea a lo largo de la curva C dada:

$\int_C 6x^2\,dx + xy\,dy$, C es la gráfica de $y = x^3 + 1$ entre $(-1,0)$ y $(1,2)$

Primero que nada, reconozcamos la curva sobre la que integraremos. Se trata de un tramo de una cúbica, trasladada verticalmente un lugar, que va desde $(-1,0)$ hasta $(1,2)$. A continuación, se presenta su gráfica. Hemos trazado la función con línea punteada y destacado en azul el tramo que nos interesa, a fin de facilitar la comprensión.



Debemos hallar una parametrización de este tramo de curva. Podemos encontrar varias, la más sencilla y directa es

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^3 + 1 \end{cases} \quad -1 \le t \le 1$$

No debemos olvidar especificar lo límites del parámetro t, ya que, si no lo hacemos, nos estaremos refiriendo a la curva completa, y no a un tramo de esta, y además estos límites serán los límites de integración.

De esta parametrización obtenemos que $dx = dt$ y $dy = 3t^2 dt$.

Reemplazando todo esto en la integral de línea dada, tenemos:

$$\int_C 6x^2\,dx + xy\,dy = \int_{-1}^{1} 6\,t^2\,dt + t\,(t^3+1)(3t^2)dt = \int_{-1}^{1} 6\,t^2 + t\,(t^3+1)(3t^2)\,dt$$

Haciendo las operaciones correspondientes e integrando obtenemos $\int_C 6x^2\,dx + xy\,dy = \frac{34}{7}$.

Ejercicio 18: La fuerza en un punto (x,y) de un plano coordenado es $\mathbf{F}(x,y) = (x^2+y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$. Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F}(x,y)$ a lo largo de la gráfica $y = x^3$ desde (0,0) hasta (2,8).

Recurriendo a la definición 18.11, pero mirándola en R^2 tenemos que:

$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ es la fuerza, donde podemos identificar $M(x, y) = x^2 + y^2$, y $N(x, y) = xy$.

La curva $y = x^3$ desde (0,0) hasta (2,8) la podemos parametrizar como $\begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2$. De aquí, $dx = dt$ y $dy = 3t^2\, dt$. Reemplazando todo esto y resolviendo la integral de línea encontramos que, el trabajo realizado por $\mathbf{F}(x, y)$ a lo largo de la gráfica $y = x^3$ desde (0,0) hasta (2,8) es: $\int_0^2 x^2 + y^2\, dx + xy\, dy = \int_0^2 t^2 + t^5 + 3t^6\, dt = \frac{1432}{21}$.