INTEGRALES MÚLTIPLES

Introducción

En CÁLCULO I / ANÁLISIS MATEMÁTICO I se definieron y estudiaron las integrales indefinida y definida de una función real (con valores en $\mathbb{R}$) de una sola variable (también en $\mathbb{R}$).

A continuación se consideran dos clases de integrales (definidas) para funciones de varias variables.

- **Integrales dobles**: el integrando es una función real de dos variables (y, por lo tanto, la región de integración es bidimensional).
- **integrales triples**: el integrando es una función real de tres variables (y, por lo tanto, la región de integración es tridimensional).

Guía de estudio

Al estudiar este tema, se pueden tomar como guía los contenidos que se proponen a continuación, donde la numeración de referencia corresponde al libro "Cálculo con Geometría Analítica" (2^a Ed.) de EARL W. SWOKOWSKI (CAPÍTULO 17).

NOTA: *Los ejercicios teóricos propuestos al final de cada sección no se evaluarán en los parciales ni en sus recuperaciones, pero sí, posiblemente, en el coloquio para promocionar y en el examen final.*

INTEGRALES DOBLES

DEFINICIÓN (17.1): Suma de Riemann de una función de dos variables (pág. 865)

Para entender esta definición (y las siguientes) es fundamental leer los párrafos previos, donde se establecen las notaciones a utilizar y se definen:

- **Región de tipo I** y **región de tipo II** (pág. 864).
- **Partición interna** de una región R y **norma de una partición** (pág. 865).

Tener presente que, a lo largo de toda esta sección, R representa una región de tipo I, una región de tipo II, o una región que se puede descomponer en un número finito de subregiones de estos tipos.

DEFINICIÓN (17.2): Definición formal de límite aplicada a las sumas de Riemann cuando se consideran particiones internas de R cada vez más "finas", esto es, cuando las normas de las particiones tienden a 0 (*leer para entender la igualdad involucrada en la definición siguiente...* pág. 865/866)

DEFINICIÓN (17.3): Integral doble (pág. 866)

- Si la integral doble de f sobre la región R existe (es decir, si el límite de las definición anterior es igual a un número real), se dice que f es **integrable** sobre R.

Se puede demostrar (*aunque no lo haremos en este curso*) que si f es continua en R, o bien, es acotada sobre R y discontinua sólo en una cantidad finita de curvas suaves, entonces es integrable sobre R.

DEFINICIÓN (17.4): Interpretación geométrica de las integrales dobles (pág. 866)

TEOREMA (17.5): Propiedades de las integrales dobles (pág. 867)

EJERCICIOS TEÓRICOS

Todas las carreras: 16 (pág. 868)

Sólo matemáticos: 17 y 18 (pág. 868)

EVALUACIÓN DE LAS INTEGRALES DOBLES

Excepto en algunos pocos casos elementales, es imposible o, al menos, muy poco práctico, calcular el valor de una integral doble directamente a partir de la definición (17.3).

> En esta sección se muestra que, si la región de integración R es de tipo I o de tipo II, entonces la integral doble puede expresarse en términos de dos integrales simples (con una sola variable independiente) sucesivas.

La evaluación de estas integrales simples requiere realizar **integraciones parciales**.

En la pág. 869 se considera el caso más básico, es decir, en el que la región R es un rectángulo (y es, por lo tanto, simultáneamente de tipo I y de tipo II), y se explica y ejemplifica (EJEMPLO 1) el modo de realizar integraciones parciales para las integrales simples involucradas en dicho caso.

DEFINICIÓN (17.6): Integrales dobles iterativas (o **iteradas**) **sobre una región rectangular** (pág. 870)

Leer EJEMPLO 2 *y* EJEMPLO 3 (pág. 870).

> Se puede demostrar (*aunque no lo haremos en este curso*) que si f es continua sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, o bien, es acotada sobre R y discontinua sólo en una cantidad finita de curvas suaves, entonces las dos integrales iterativas de la definición (17.6) conducen al mismo resultado Este hecho se conoce con el nombre de **TEOREMA DE FUBINI**.

DEFINICIÓN (17.7): Integrales dobles iterativas (o **iteradas**) **sobre una región** (no necesariamente rectangular) **de tipo I y/o de tipo II** (pág. 871)

En el párrafo siguiente a la definición (17.7) se explica, y luego se ejemplifica (EJEMPLO 4), el método para resolver las integrales dobles allí consideradas, el cual es muy similar al aplicado para regiones de integración rectangulares.

> Se puede demostrar (*aunque no lo haremos en este curso*) que si f es continua en una región R de tipo I y/o de tipo II, entonces la integral doble de f sobre R (definida en la sección 17.1) se puede evaluar mediante una integral iterativa (como las consideradas en la definición (17.7)).
> Esto se establece en el **TEOREMA DE EVALUACIÓN DE INTEGRALES DOBLES (17.8)**.

Los EJEMPLOS 6, 7 y 8 (pág. 873-875) ilustran la forma de aplicar en la práctica el teorema (17.8) (*se recomienda leerlos cuidadosamente*).

ÁREA Y VOLUMEN (como una aplicación de las integrales dobles)

En la sección anterior (en la pág. 872), se ofrece una deducción intuitiva (en lugar de una demostración formal) de la fórmula (i) del teorema (17.8) **para el caso en que $f(x, y)$ es una función no negativa** (*se recomienda leerla para entender lo que sigue*). Como consecuencia paralela, se muestra que dicha fórmula da el volumen V del sólido (objeto tridimensional) que se encuentra bajo la gráfica de la ecuación $z = f(x, y)$ y encima de la región R **de tipo** I en el plano xy. Esto es:

$$V = \iint_R f(x, y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx.$$

Además, en el caso considerado (f no negativa), dado que la variable z corresponde a la altura del sólido, cuando la misma es constantemente igual a 1 sobre la región plana R, es decir $f(x, y) = 1$ para todo (x, y) en R, lo que se obtiene de la fórmula mencionada puede interpretarse también como el área A de R. Esto es:

$$A = \iint_R 1dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1dydx.$$

Cuando R es de **tipo** II, se tienen las siguientes fórmulas análogas:

$$V = \iint_R f(x, y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dxdy \quad \text{y} \quad A = \iint_R 1dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dxdy.$$

NOTA: Cada una de las integrales iterativas involucradas en las fórmulas anteriores pueden expresarse como el **límite de una suma doble**. *En este curso no profundizaremos esta idea, pero el alumno interesado puede encontrar dichos límites en* (17.9) *y* (17.10) *y leer los comentarios circundantes para adquirir intuición sobre los mismos* (pág. 876 a 878). *Este planteo también se encuentra desarrollado con claridad en el libro* Cálculo de varias variables | Trascendentes tempranas | 7^a Ed. - JAMES STEWART.

En la práctica, al aplicar las fórmulas anteriores, conviene tener presentes los siguientes puntos:

- Cuando la región R es tanto de tipo I como de tipo II, puede ser tratada indistintamente de una forma o de la otra, sin variar el resultado de la integral.
- Cuando R no es de tipo I ni de tipo II, pero es una unión finita de subregiones disjuntas de estos tipos, para calcular la integral deben trabajarse por separado cada una de dichas subregiones y considerar luego la suma de todos los resultados (*ver la segunda resolución del* EJEMPLO 2).
- Cuando la función $f(x, y)$ NO es no negativa sobre toda la región R, el resultado de la integral doble puede interpretarse como un "volumen con signo", es decir, como el volumen del sólido comprendido bajo la gráfica de f y por encima de R (en la parte de R donde f es no negativa) menos el volumen del sólido que queda por encima de la gráfica de f y debajo de R (en la parte de R donde f es negativa).
- A veces, para integrar más fácilmente, puede resultar conveniente "invertir los ejes", o bien, considerar definiciones análogas a las dadas para regiones planas de tipo I y de tipo II en los planos xz o yz (en lugar del plano xy).

Para familiarizarse con el planteo y cálculo de áreas y volúmenes a través de integrales iterativas, es recomendable leer con atención los cuatro ejemplos desarrollados en esta sección (pág. 878 a 881).

INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

No son pocas las regiones en el plano cuya representación mediante una ecuacuación en coordenadas polares resulta notablemente más sencilla que su correspondiente en coordenadas rectangulares.

Recordemos que las coordenadas rectangulares (x, y) y las coordenadas polares (r, θ) de un punto P en el plano están relacionadas como sigue:

$$x = r \cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta, \qquad r^2 = x^2 + y^2.$$

NOTA: Conviene recordar también que si (r, θ) representa al punto P en coordenadas polares, r indica la distancia de P al origen y θ es la medida, tomada en sentido antihorario (positivo), del ángulo comprendido entre el eje polar (semieje x positivo) y la semirecta que nace en el origen y pasa por P.

En los casos antes mencionados, la ventaja de simplicidad que ofrece el uso de coordenadas polares repercute en el cálculo de las integrales dobles que involucran a dichas regiones. En efecto, si R es una región plana acotada por gráficas de ecuaciones polares, la integral doble sobre R de una función de las variables r y θ se puede definir de mediante una serie de pasos análogos a los realizados en coordenadas rectangulares (*el alumno interesado en los detalles de dicha definición puede encontrarlos en las pág.* 882 *y* 883). Además, a modo de reglas prácticas, se pueden demostrar (*aunque no lo haremos en este curso*) los siguientes resultados para la **evaluación de integrales dobles en coordenadas polares**:

TEOREMA (17.11): Sea R una región acotada por dos rayos que forman ángulos positivos α y β con el eje polar, y por las gráficas de dos ecuaciones polares $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$, donde g_1 y g_2 son funciones continuas tales que $g_1(\theta) \leq g_2(\theta)$ para todo θ en el intervalo $[\alpha, \beta]$. Si f es una función continua (en R) de las variables polares r y θ, entonces

$$\iint_R f(r,\theta)dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta) r dr d\theta.$$

Leer EJEMPLO 1 *y* EJEMPLO 2 (pág. 883-884).

TEOREMA (17.11): Sea R una región acotada por los arcos de dos circunferencias centradas en el origen de radios a y b, y por las gráficas de dos ecuaciones polares $\theta = h_1(r)$ y $\theta = h_2(r)$, donde h_1 y h_2 son funciones continuas tales que $h_1(r) \leq h_2(r)$ para todo r en el intervalo $[\alpha, \beta]$. Si f es una función continua (en R) de las variables polares r y θ, entonces

$$\iint_R f(r,\theta)dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r,\theta) r d\theta dr.$$

Leer EJEMPLO 4 (pág. 885).

NOTA: Los tipos de regiones elementales consideradas en los teoremas (17.11) y (17.13) tienen, a la hora de evaluar integrales dobles en coordenadas polares, un rol análogo al de las regiones de tipo I y de tipo II utilizadas al trabajar con integrales dobles en coordenadas rectangulares.

Como se comentó anteriormente, en condiciones adecuadas, se puede y suele resultar conveniente **transformar una integral doble en coordenadas rectangulares a una integral doble en coordenadas polares**. Para ello:

1° Se sustituyen en el integrando las variables x e y por r cosθ y r senθ, respectivamente.

2° Se sustituye en la integral iterativa correspondiente, $dydx$ (o bien, $dxdy$) por $r\ drd\theta$ (o bien, $r\ d\theta dr$).

3° Los límites de integración se expresan en forma polar.

La siguientes fórmulas resumen estos tres pasos:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dydx = \iint_R f(r\ \cos\theta, r\ \text{sen}\theta) r dr d\theta\ ,}$$

o bien,

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_R f(r\ \cos\theta, r\ \text{sen}\theta) r d\theta dr\ .}$$

NOTA: En cada miembro de estas igualdades el símbolo $\iint_R$ debe ser reemplazado por un símbolo de integral iterativa apropiado, correspondiente a la representación de la frontera de R (límites de integración) en coordenadas rectangulares en los miembros izquierdos, y en coordenadas polares en los derechos. *Leer* EJEMPLO 3 (pág. 884).

Otras consideraciones:

- Bajo hipótesis adecuadas, las propiedades estudiadas para las integrales dobles en coordenadas rectangulares son válidas también para las integrales dobles en coordenadas polares.
- Si $f(r,\theta) = 1$ en toda R, entonces la integral en el teorema (17.11) [o (17.13)] es igual al área de R.
- Si $f(r,\theta) \geq 0$ en toda R, entonces la integral en el teorema (17.11) [o (17.13)] puede interpretarse como el volumen de un sólido. Sin embargo, la diferencia principal con las coordenadas rectangulares es que se considera como cota superior de dicho sólido a la superficie S que es gráfica de la ecuación $z = f(r,\theta)$ en coordenadas cilíndricas (*veremos esta clase de coordenadas más adelante*).

ÁREA DE UNA SUPERFICIE

Dada una región R en el plano xy de la clase considerada en las secciones previas (que se puede descomponer en una cantidad finita de subrregiones disjuntas de tipo I y/o de tipo II), hemos aprendido, hasta acá, cómo se pueden utilizar integrales dobles (iterativas) para

- calcular el **área de la región plana** R,

y también,

- calcular el **volumen del sólido** que tiene a R como frontera inferior, y a la parte de la gráfica de una función, no negativa y continua sobre R, cuya proyección en el plano xy es R, como frontera superior**.**

Ahora, supongamos que $f(x, y)$ es una función no negativa con primeras derivadas parciales continuas sobre R, y sea S la parte de la gráfica de f cuya proyección en el plano xy es la región R. En esta sección:

- Se define el **área de la superficie** S mediante el límite de una suma: **DEFINICIÓN (17.14) y discusión precedente** (pág. 888).
- Se deduce un modo de calcular dicha área mediante una integral doble: **FÓRMULA (17.15)** (pág. 889).

Leer EJEMPLO 1 *y* EJEMPLO 2 (pág. 889-890).

NOTA: *No se evaluará la deducción de la fórmula (17.15), sólo su forma general y aplicación práctica. No obstante, por su riqueza teórica en contenidos específicos de este curso, se recomienda su lectura* (pág. 888-889).