CALCULO 2: Ejercicios resueltos (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

Sección 17.8: Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas (Pág. 912): 1, 2, 12, 15, 16, 19, 21

Para trabajar con coordenadas cilíndricas y esféricas, debemos tener a mano la relación entre ellas y las coordenadas rectangulares:

Las **coordenadas cilíndricas** (r, θ, z) se relacionan con las rectangulares (x, y, z) de la siguiente forma:

$x = rcos\theta$, $y = rsen\theta$, $z = z$, con $0 \leq \theta < 2\pi$

$tan\theta = \frac{y}{x}$ $\quad r^2 = x^2 + y^2$.

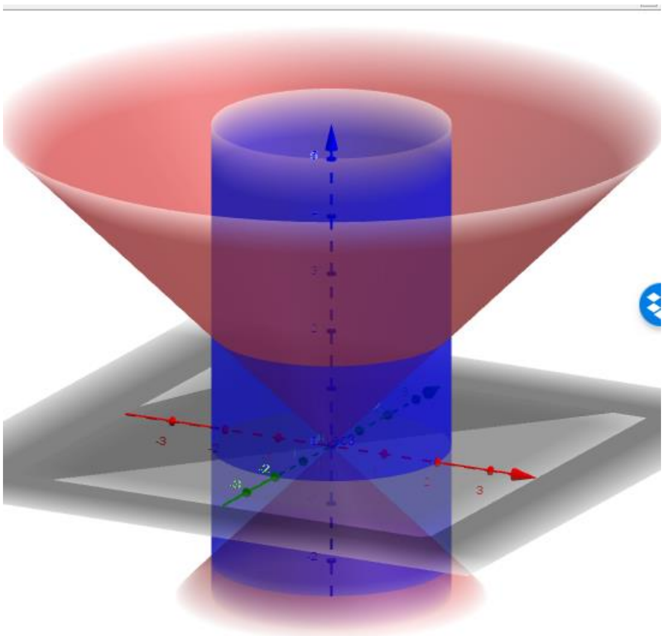
Las **coordenadas esféricas** (ρ, θ, φ) se relacionan con las rectangulares (x, y, z) de la siguiente forma:

$x = \rho sen\varphi cos\theta$, $y = \rho sen\varphi sen\theta$, $z = \rho cos\varphi$,

$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi < \pi$

Usando coordenadas cilíndricas:

Ejercicio 2: Calcule el volumen del sólido acotado por las gráficas de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 4$, y $z = 0$.



Primero que nada, tratemos de visualizar el sólido en cuestión:

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la ecuación de un cono.

$x^2 + y^2 = 4$ es la ecuación de un cilindro circular de radio 2, con centro en el origen.

$z = 0$ es el plano xy.

El sólido es lo que se encuentra sobre el plano xy, debajo del cono y dentro del cilindro.

Si lo quisiéramos plantear en coordenadas rectangulares, tendríamos los siguientes límites:

$0 \leq z \leq cono$, es decir $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

$-2 \leq x \leq 2$ y $-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$ y la función del integrando sería $f(x, y, z) = 1$ por tratarse de un volumen mediante una integral triple.

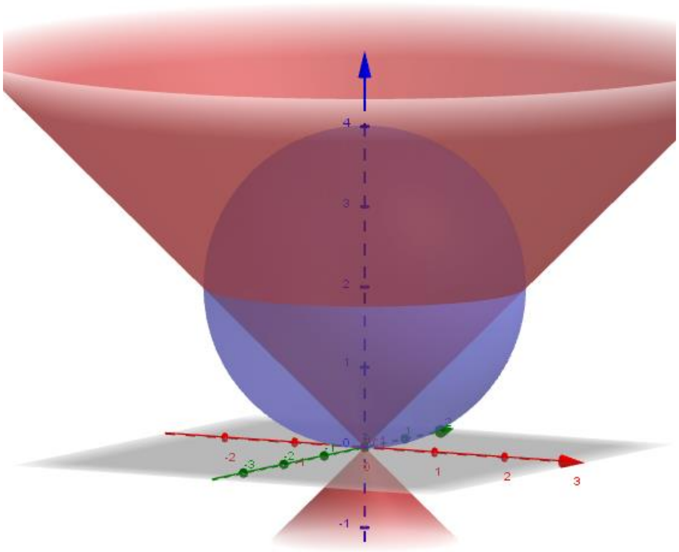
Como nos piden calcular el volumen usando coordenadas cilíndricas tendremos los siguientes límites:

$0 \leq z \leq r$ ya que si paso la ecuación del cono a cilíndricas obtengo $z = r$, y además el sólido está sobre el plano xy, es decir $z = 0$; y viendo que la intersección entre el cono y el cilindro es un círculo de radio 2 obtenemos que $0 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Con todo esto: $V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^r r\, dz\, dr\, d\theta = \frac{16}{3}\pi$

Usando coordenadas esféricas:

Ejercicio 15: Calcule el volumen del sólido que se encuentra arriba del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.



Observemos que la esfera no está centrada en el origen, sino que está desplazada; completando cuadrado encontramos que

$x^2 + y^2 + z^2 = 4z \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ es una esfera con centro en $(0,0,2)$ y radio 2.

Teniendo en cuenta las equivalencias entre coordenadas esféricas y rectangulares, la ecuación de esta esfera en coordenadas esféricas es

$x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \quad \rightarrow \quad \rho^2 - 4\rho cos\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \rho = 4cos\varphi$

El volumen que queremos calcular se encuentra sobre el cono, dentro de la esfera:

- el ángulo φ, que se mide desde el eje z hacia abajo, varía entre 0 y $\frac{\pi}{4}$
- el ángulo θ varía entre 0 y 2π ya que la intersección de ambas superficies es un círculo con centro en $(0,0)$ y radio 2. (Igualando ambas ecuaciones se llega a dicho círculo).
- el radio ρ, lo medimos desde el origen de coordenadas, trazando rayos sobre el sólido que nos interesa, su límite siempre es la esfera, pero al no estar esta centrada en el origen, no podemos

decir que varía entre cero y 2 (que es el radio de la esfera), sino que varía entre 0 y la esfera expresada en coordenadas esféricas, esto es $\rho = 4cos\varphi$.

- Estamos calculando el volumen, por lo tanto nuestra función será $f(\rho, \varphi, \theta) = 1$.

Con todo esto, recurriendo al teorema 17.28, el volumen del sólido pedido es:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{4cos\varphi} \rho^2 sen\varphi \, d\rho d\varphi d\theta = 8\pi$$