INTEGRALES TRIPLES

EN COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

Al estudiar este tema, se pueden tomar como guía los contenidos que se proponen a continuación, donde la numeración de referencia corresponde al libro "Cálculo con Geometría Analítica" (2^a Ed.) de EARL W. SWOKOWSKI (CAPÍTULO 17 Sección 8).

Así como un sistema de coordenadas polares puede servir para simplificar cierta clase de ecuaciones en dos variables expresadas mediante coordenadas rectangulares, los sistemas tridimensionales de coordenadas cilíndricas y esféricas, pueden utilizarse de manera similar para ecuaciones en tres variables rectangulares, y su principal aplicación es la de hacer más sencilla la evaluación de integrales múltiples.

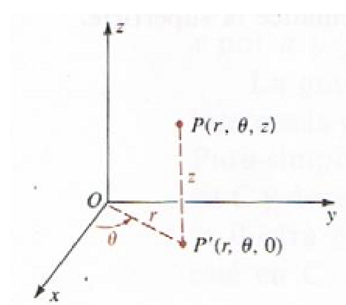
Coordenadas cilíndricas

Recordemos que las coordenadas rectangulares (x, y, z) y las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de un punto P en el espacio están relacionadas como sigue:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad \tan\theta = \tfrac{y}{x},$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad z = z.$$

Conviene recordar también que si (r, θ, z) representa al punto P en coordenadas cilíndricas, r y θ son las coordenadas polares del par (x, y) (es decir, de la proyección P' de P en el plano xy) y z es la tercer coordenada rectangular de P.



NOTA: *Se recomienda al alumno que no esté familiarizado con las ecuaciones en coordenadas cilíndricas y sus representaciones en el espacio tridimensional, ver los ejemplos* 1 *y* 2*, así como los comentarios e ilustraciones previas en la sección* 14.7 (pág. 732-733).

Ahora bien, si Q es un sólido acotado por gráficas de ecuaciones en coordenadas cilíndricas, la integral triple sobre Q de una función de las variables r, θ y z, se puede definir también usando particiones internas, como en el caso de las coordenadas rectangulares (*en este curso, omitiremos los detalles de dicha definición; no obstante, el alumno que así lo desee, puede profundizar en ellos, para un caso particularmente sencillo, en las pág.* 908-909). Además, a modo de reglas prácticas, se pueden demostrar (*aunque no lo haremos en este curso*) los siguientes resultados para la **evaluación de integrales triples en coordenadas cilíndricas.**

TEOREMA (17.27): Sea R una región plana acotada por dos rayos que forman ángulos positivos α y β con el eje polar, y por las gráficas de dos ecuaciones polares $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$, donde g_1 y g_2 son funciones continuas tales que $g_1(\theta) \leq g_2(\theta)$ para todo θ en el intervalo $[\alpha, \beta]$, y sea

$$Q = \{(r, \theta, z) \mid (r, \theta) \text{ está en } R \text{ y } k_1(r, \theta) \leq z \leq k_2(r, \theta)\},$$

donde k_1 y k_2 son funciones con primeras derivadas parciales continuas en toda la región R. Entonces, la integral triple de una función continua $f(r, \theta, z)$ sobre Q puede evaluarse como sigue:

$$\iiint_Q f(r, \theta, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{k_1(r,\theta)}^{k_2(r,\theta)} f(r, \theta, z)\, dz\right] dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{k_1(r,\theta)}^{k_2(r,\theta)} f(r, \theta, z)\ r\ dz\ dr\ d\theta.$$

Leer EJEMPLO 1 (pág. 909).

Las integrales iterativas del teorema anterior corresponden al caso en que R es una región polar elemental como la del teorema (17.11). Cuando R es del tipo abarcado por el teorema (17.13), se tiene el siguiente resultado análogo.

Sea R una región plana acotada por los arcos de dos circunferencias centradas en el origen de radios a y b, y por las gráficas de dos ecuaciones polares $\theta = h_1(r)$ y $\theta = h_2(r)$, donde h_1 y h_2 son funciones continuas tales que $h_1(r) \leq h_2(r)$ para todo r en el intervalo $[a, b]$, y sea

$$Q = \{(r, \theta, z) \mid (r, \theta) \text{ está en } R \text{ y } k_1(r, \theta) \leq z \leq k_2(r, \theta)\},$$

donde k_1 y k_2 son funciones con primeras derivadas parciales continuas en toda la región R. Entonces, la integral triple de una función continua $f(r, \theta, z)$ sobre Q puede evaluarse como sigue:

$$\iiint_Q f(r, \theta, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{k_1(r,\theta)}^{k_2(r,\theta)} f(r, \theta, z)\, dz\right] dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} \int_{k_1(r,\theta)}^{k_2(r,\theta)} f(r, \theta, z)\ r\ dz\ d\theta\ dr.$$

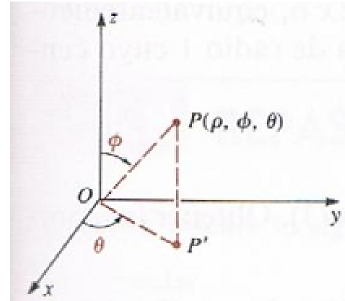
Coordenadas esféricas

Recordemos que las coordenadas rectangulares (x, y, z) y las coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) de un punto P en el espacio están relacionadas como sigue:

$$x = \rho \text{ sen } \phi \cos \theta, \qquad y = \rho \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta, \qquad z = \rho \cos \phi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Conviene recordar también que si (ρ, ϕ, θ) representa al punto P en coordenadas cilíndricas, ϕ es el ángulo entre el semieje z positivo y el vector $\overrightarrow{OP}$, mientras que θ es el ángulo polar (segunda coordenada polar) correspondiente a la proyección P' de P en el plano xy. Además, como se puede observar en el recuadro anterior, $\rho = \left\|\overrightarrow{OP}\right\|$.



NOTA: *Se recomienda al alumno que no esté familiarizado con las ecuaciones en coordenadas esféricas y sus representaciones en el espacio tridimensional, ver los ejemplos* 1 *y* 2*, así como los comentarios e ilustraciones previas en la sección* 14.7 (pág. 734-735).

También, como en los casos de las coordenadas rectangulares y cilíndricas, si Q es un sólido acotado por gráficas de ecuaciones en coordenadas esféricas, la integral triple sobre Q de una función de las variables ρ, ϕ y θ, se puede definir también usando particiones internas y sumas de Riemann (*en este curso, omitiremos los detalles de dicha definición; no obstante, el alumno que así lo desee, puede profundizar en ellos, para un caso particularmente sencillo, en las pág.* 910-911). Además, a modo de regla práctica, se puede demostrar (*aunque no lo haremos en este curso*) el siguiente resultado básico para la **evaluación de integrales triples en coordenadas esféricas.**

TEOREMA (17.28): Sea $f(\rho, \phi, \theta)$ una función continua en una región de la forma

$$Q = \{(\rho, \phi, \theta) \mid a \leq \rho \leq b,\, c \leq \phi \leq d,\, m \leq \theta \leq n\}.$$

donde k_1 y k_2 son funciones con primeras derivadas parciales continuas en toda la región R. Entonces, Entonces, la integral triple de f sobre Q puede evaluarse como sigue:

$$\iiint_Q f(\rho, \phi, \theta)\, dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(\rho, \phi, \theta)\ \rho^2 \text{ sen } \phi \ d\rho\ d\phi\ d\theta.$$

Leer EJEMPLO 2 (pág. 911).

NOTA: Las coordenadas esféricas también pueden utilizarse en regiones más complicadas que la región elemental Q considerada en el teorema anterior, en cuyo caso los límites de integración deben escogerse cuidadosamente, de manera similar a los casos antes formulados para coordenadas rectangulares y cilíndricas.