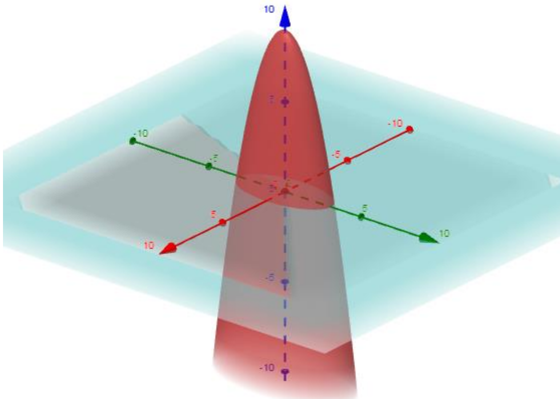
CALCULO 2: Ejercicios resueltos (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

Sección 17.6: Integrales Triples (Pág. 899): 3, 4, 7, 9, 11, 17, 21, 23

Ejercicio 9: Realice la representación de la región Q acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y exprese $\iiint_Q f(x,y,z)dV$ como seis integrales iterativas diferentes:

$z = 9 - 4x^2 - y^2$, $z = 0$

La región Q está encerrada por el paraboloide y el plano *xy*, como se muestra en la figura.



Para hallar las seis integrales iterativas diferentes lo que haremos es ir proyectando esta región sobre los tres planos coordenados, y en base a esta proyección determinar los límites de integración.

- **Proyectamos sobre el plano *xy*:**

Hacemos $z = 0$ y obtenemos la ecuación de una elipse en el dicho plano: $4x^2 + y^2 = 9$, o bien $\frac{x^2}{9/4} + \frac{y^2}{9} = 1$. En la figura 1 aparece en azul esta elipse y al lado su representación en el plano *xy*

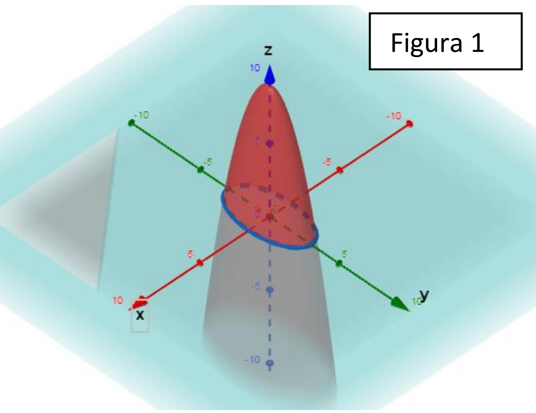


Figura 1

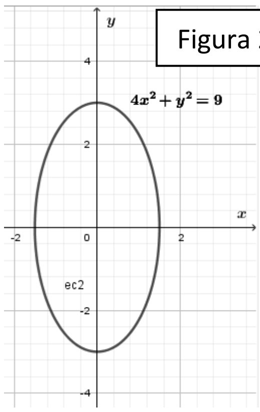


Figura 2

Recordando lo trabajado en el parágrafo 17.2 y considerando la elipse de la figura 2 como una región del Tipo I podemos determinar que $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$, y $-\sqrt{9-4x^2} \leq y \leq \sqrt{9-4x^2}$. Además, tenemos que la variación de z es $0 \leq z \leq 9 - 4x^2 + y^2$ (si uno quisiera ingresar a la región Q, de manera paralela al eje *z*, desde los negativos a los positivos, tendría que entrar por el plano *xy* y salir por el paraboloide).

Todo esto nos conduce a la integral iterativa: $\boxed{\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \int_{-\sqrt{9-4x^2}}^{\sqrt{9-4x^2}} \int_0^{9-4x^2+y^2} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx.}$

Si la misma región la miramos de Tipo II:

$-3 \leq y \leq 3,\ -\frac{\sqrt{9-y^2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{9-y^2}}{2}$ y $0 \leq z \leq 9 - 4x^2 + y^2$

Y la integral iterativa es $\boxed{\int_{-3}^{3} \int_{-(\sqrt{9-y^2})/2}^{(\sqrt{9-y^2})/2} \int_0^{9-4x^2+y^2} f(x,y,z)\, dz\, dx\, dy.}$

- **Proyectamos sobre el plano *yz***:

Al hacer $x = 0$, obtenemos una parábola en el plano *yz* cuya ecuación es $z = 9 - y^2$. En las figuras se presenta dicha proyección (dibujada en *yz*) (azul en la figura 3)

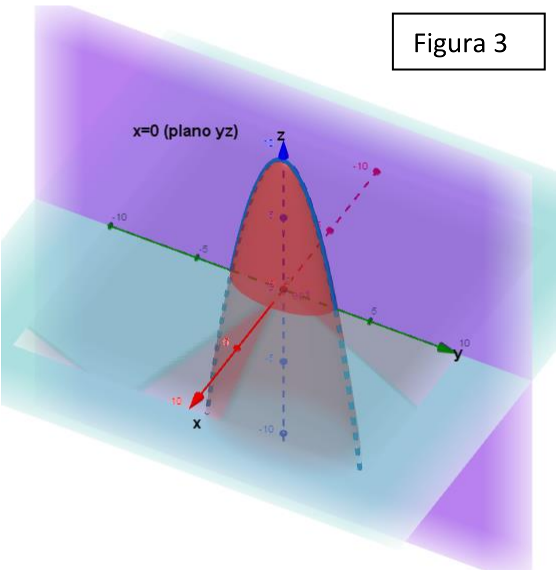


Figura 3

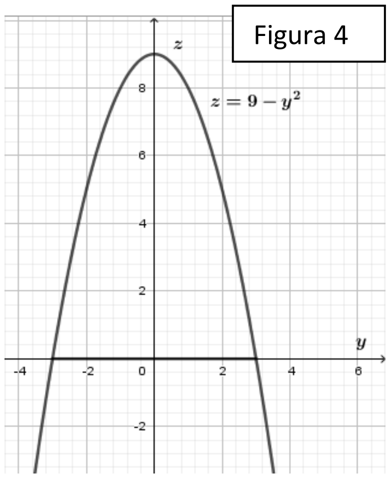


Figura 4

Al observar en la figura 4 una región del Tipo I determinamos que $-3 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 9 - y^2$, mientras que $-\frac{\sqrt{9-z-y^2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{9-z-y^2}}{2}$ (estos límites salieron de despejar x de la ecuación del paraboloide).

Con todo esto tenemos $\boxed{\int_{-3}^{3} \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{-\frac{\sqrt{9-z-y^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{9-z-y^2}}{2}} f(x,y,z)\, dx\, dz\, dy.}$

Y si la miramos como una región del Tipo II los límites serían $0 \leq z \leq 9$, $-\sqrt{9-z} \leq y \leq \sqrt{9-z}$, y $-\frac{\sqrt{9-z-y^2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{9-z-y^2}}{2}$.

Así tenemos: $\boxed{\int_0^9 \int_{-\sqrt{9-z}}^{\sqrt{9-z}} \int_{-\frac{\sqrt{9-z-y^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{9-z-y^2}}{2}} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}$.

- **Proyectamos sobre el plano *xz*:**

Haciendo $y = 0$ obtenemos una parábola en el plano *xz* cuya ecuación es $z = 9 - 4x^2$. En las figuras se presenta dicha proyección (dibujada en xz) (azul en la figura 5)

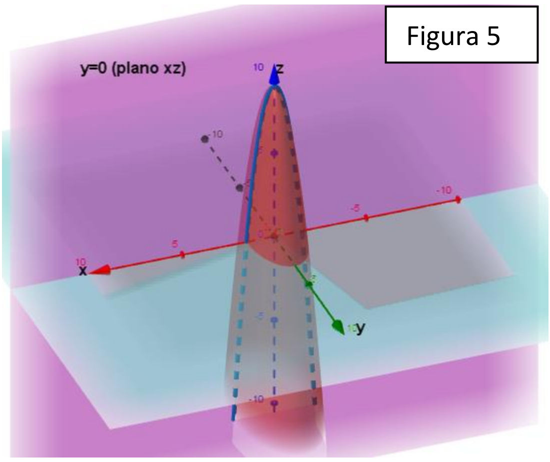


Figura 5

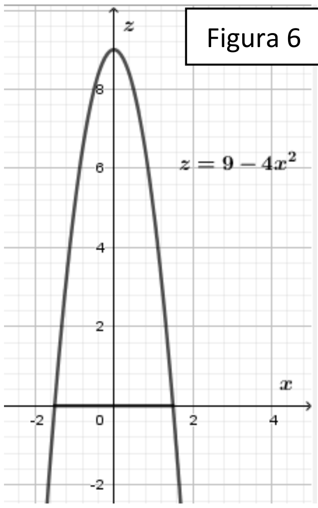


Figura 6

Al observar la figura 6 como una región del Tipo I encontramos que $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ (sale al hacer z=0 en la parábola y despejar x), $0 \leq z \leq 9 - 4x^2$, y despejando y de la ecuación del paraboloide hallamos que $-\sqrt{9 - 4x^2 - z} \leq y \leq \sqrt{9 - 4x^2 - z}$.

Con todo esto tenemos $\boxed{\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \int_0^{9-4x^2} \int_{-\sqrt{9-4x^2-z}}^{\sqrt{9-4x^2-z}} f(x,y,z)\, dy\, dz\, dx.}$

Y si la miramos como región Tipo II:

$0 \leq z \leq 9\,,\ -\frac{\sqrt{9-z}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{9-z}}{2},\ -\sqrt{9 - 4x^2 - z} \leq y \leq \sqrt{9 - 4x^2 - z}$

Obtenemos así $\boxed{\int_0^9 \int_{-\frac{\sqrt{9-z}}{2}}^{\frac{\sqrt{9-z}}{2}} \int_{-\sqrt{9-4x^2-z}}^{\sqrt{9-4x^2-z}} f(x,y,z)\, dy\, dx\, dz}$

Las seis integrales iterativas pedidas son las que están recuadradas en rojo.

Aclaración:

- Suele no resultar fácil armar las seis integrales, algunas son más sencillas de ver que otras, e incluso más fácil de resolver también. Al momento de tener que resolver una integral triple uno acude a lo que le resulte más conveniente. Es probable que para resolverla tengamos que usar coordenadas polares.
- Siempre hay que tener en cuenta, al plantearlas, que la integral de más afuera tendrá límites constantes; la del medio tendrá límites que pueden depender de una de las variables (la de más afuera); y la de adentro tendrá límites que dependa de las otras dos.