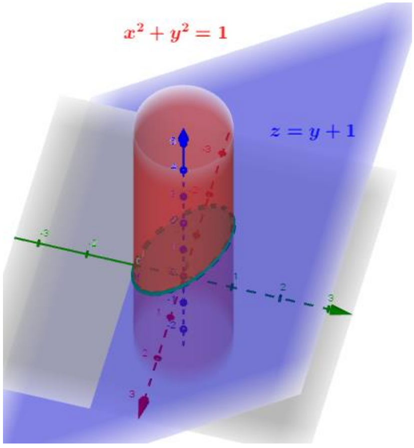
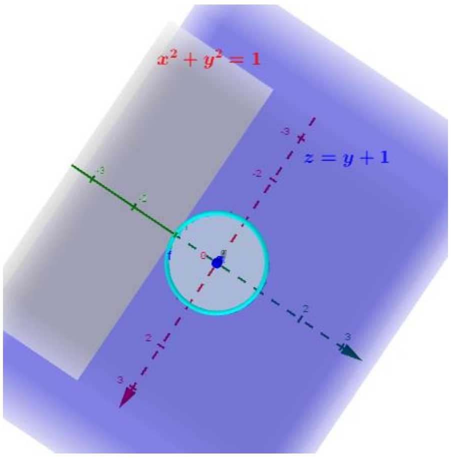
CALCULO 2: Ejercicios resueltos (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

Sección 17.5: Área de una superficie (Pág. 890): 1, 2, 6, 7

Ejercicio 2: Determine el área de la región del plano $z = y + 1$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

El plano y el cilindro dado se muestran en la figura. Se intersecan encerrando una región, y a esa región es a la que debemos calcularle el área.





Si proyectamos sobre el plano *xy* dicha región, o bien, si la miramos desde arriba hallaremos que se trata de un círculo de radio 1, el cuál nos dará los límites a la hora de plantear la integral.

Para calcular el área pedida, recurriremos a la definición 17.15 (Pág. 889). Para ello, ya tenemos $z = f(x, y) = y + 1$. Calculemos las derivadas parciales de $f(x, y)$:

$$f_x(x, y) = 0; \quad f_y(x, y) = 1.$$

Por otro lado, tenemos que la proyección de dicha región sobre el plano *xy* es un círculo de radio 1, lo cual indica que los límites de integración, trabajando en coordenadas polares, serán

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1$$

Por lo tanto:

$$A = \iint_R \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1}\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta = \sqrt{2}\, \pi$$