CALCULO 2: Ejercicios resueltos (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

Sección 17.4: Integrales dobles en coordenadas polares (Pág. 887): 7, 9, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 24

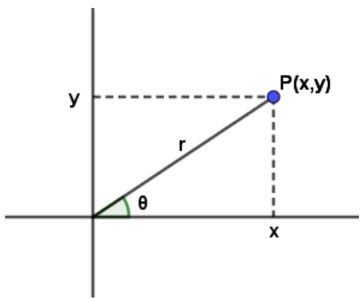
Para trabajar con coordenadas polares (r, θ) debemos tener a mano la relación entre éstas y las coordenadas rectangulares (x, y) las cuáles salen fácilmente si miramos el siguiente triángulo rectángulo y aplicamos trigonometría y Teorema de Pitágoras.

$cos\theta = \frac{x}{r} \quad \rightarrow \quad x = r\ cos\theta, \quad r \geq 0\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,$

$sen\theta = \frac{y}{r} \quad \rightarrow \quad y = r\ sen\theta, \quad r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$tan\theta = \frac{y}{x}$

$r^2 = x^2 + y^2$



Ejercicio 7: Use coordenadas polares para evaluar la integral $\iint_R\ (x^2 + y^2)^{3/2}\ dA$ para la región R acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$.

Tenemos en el integrando la función $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$, para usar coordenadas polares debemos expresar ésta en términos de (r, θ). Teniendo en cuenta las relaciones entre ellas, reemplazamos y obtenemos $f(rcos\theta, rsen\theta) = f(r, \theta) = (r^2)^{3/2} = r^3$.

Por otro lado, debemos hallar lo límites de integración, teniendo en cuenta que ahora mis variables son r, θ. La región es un círculo de radio 2, sin ninguna restricción, por lo tanto, el radio varía entre 0 y 2 y el ángulo θ entre 0 y 2π, esto es $0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Con todo esto, recurrimos a la definición 17.12 y calculamos lo pedido:

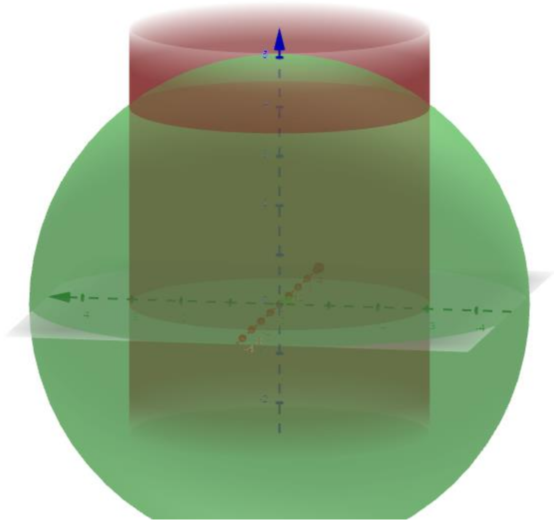
$$\iint_R (x^2 + y^2)^{3/2}\, dA = \iint_R r^3 r\ dr\ d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} r^4 dr\ d\theta = \frac{64}{5}\pi$$

Aclaración!!!

- No siempre tendremos los límites $0 \leq \theta \leq 2\pi$, por ejemplo, si mi región fuera $x^2 + y^2 = 4$ en el primer cuadrante, la variación sería $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
- No olvidar, al pasar de coordenadas rectangulares a polares, en el integrando, el factor r!!! Se llama jacobiano, es el que corresponde a este cambio de variables. Se verá en más detalle más adelante.

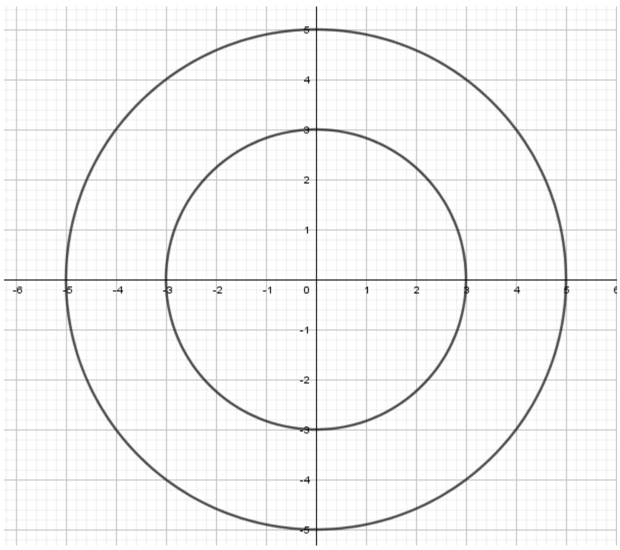
Ejercicio 19: Calcule el volumen del sólido que se encuentra dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

Tenemos una esfera centrada en el origen de coordenadas, de radio 5, y un cilindro circular de radio 3, centrado también en el origen. Queremos calcular el volumen que queda entre ellos.



Primero veamos quien sería la función del integrando: Considerando las coordenadas rectangulares tenemos $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ y haciendo el reemplazo correspondiente con las equivalencias en coordenadas polares tenemos $f(r, \theta) = \sqrt{25 - r^2}$.

Analizando el volumen que queremos calcular, si proyectamos sobre el plano *xy*, tendremos una región acotada por dos círculos concéntricos, uno de radio 3 y otro de radio 5, y pensando en r y θ vemos que $3 \leq r \leq 5$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



Con todo esto claro el volumen pedido lo calculamos resolviendo la siguiente integral:

$$V = \iint_R \sqrt{25 - x^2 - y^2}\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_3^5 \sqrt{25 - r^2}\; r\, drd\theta = \frac{128}{3}\pi$$