CALCULO 2: Ejercicios resueltos (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

Sección 17.3: Área y Volumen (Pág. 881): 1, 4, 5, 11, 12, 13, 14, 21, 25, 27

Ejercicio 1: Represente la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y calcule el área por medio de integrales dobles

$y = \frac{1}{x^2},\ y = -x^2,\ x = 1,\ x = 2$

En la figura puede verse la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas.

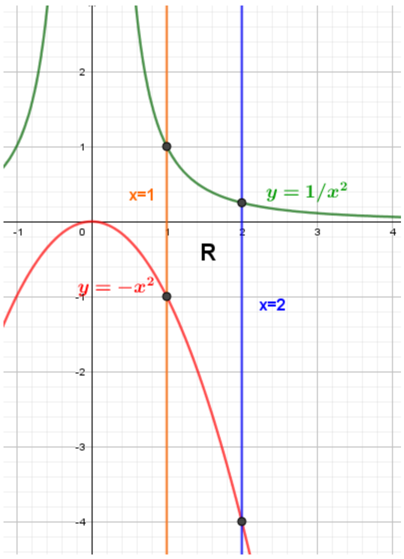
Los puntos de intersección entre ellas, en este caso, se determinan fácilmente, mirando el dibujo. Pero en caso de que esto no sea tan claro, o que la región no sea tan fácil de dibujar, debemos recurrir a resolver estos sistemas de ecuaciones para encontrar dichas intersecciones:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (1, 1)$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow \left(2, \frac{1}{4}\right)$$

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (1, -1)$$

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow (2, -4)$$



Recurriendo al teorema 17.10 notamos que el área de la región R está dad por $A = \iint_R dA$ (¡Aclaración! Acá la función del integrando es $f(x, y) = 1$)

Observemos que la región puede expresarse como una región de Tipo I o de Tipo II, pero el expresarla de Tipo II requerirá más trabajo, ya que deberemos partir la región y plantear varias integrales. Por lo tanto, es más conveniente mirarla como una región de tipo I. Recordemos que este tipo de regiones mantenía a la variable *x* entre dos valores constantes, y la variable *y* variaba (valga la redundancia) entre dos funciones de *x*.

Estableciendo los límites tenemos $1 \leq x \leq 2,\ -x^2 \leq y \leq \frac{1}{x^2}$.

Entonces: $A = \iint_R \; dA = \int_1^2 \int_{-x^2}^{\frac{1}{x^2}} dydx$.

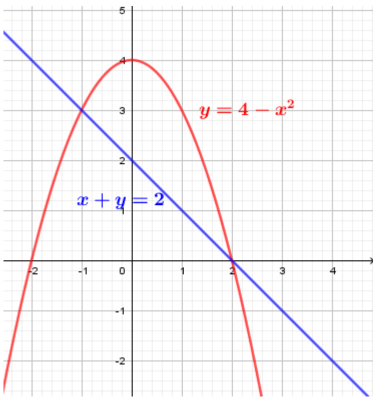
Integrando primero respecto de *y*, y luego respecto de *x*, y haciendo las operaciones necesarias, obtenemos que el área de R es $A = \frac{17}{6}\, ua$ (*ua* se usa para referirse a unidades de área. Como este ejercicio no está en un contexto, no nos habla de cm o km…. Se usa *ua* de manera general).

Ejercicio 21: Calcule el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas:

$z = x^2 + 4$, $y = 4 - x^2$, $x + y = 2$, $z = 0$

El volumen pedido es el de el sólido que se encuentra por encima del plano *xy* y debajo del cilindro parabólico $z = x^2 + 4$, y acotado por el cilindro parabólico $y = 4 - x^2$ y el plano $x + y = 2$. Imaginar este sólido puede no ser tarea fácil, pero pretendemos calcular el volumen mediante integrales dobles, por lo que debemos definir la función a integrar y los límites correspondientes.

Basándonos en la definición 17.9 consideraremos $z = f(x, y) = x^2 + 4$ y tendremos que determinar los límites de *x* e *y*.



Lo que hacemos acá es olvidar por un momento que estamos en tres dimensiones y pensar las ecuaciones $y = 4 - x^2$, $x + y = 2$ en dos dimensiones, es decir, mirarlas en el plano *xy*. (estamos proyectando el sólido sobre uno de los planos coordenados, en este caso *xy*) Haciendo esto, tenemos una parábola con ramas hacia abajo, corrida cuatro lugares en el eje de las *y*, y una recta.

Resolviendo el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ encontramos que los puntos de intersección entre las dos curvas son $(2, 0)$ y $(-1, 3)$.

Con esto podemos determinar que $-1 \leq x \leq 2$ y $2 - x \leq y \leq 4 - x^2$ (Observe que estamos mirando a esta región como una región de tipo 1).

Una vez hallado los límites podemos calcular el volumen pedido resolviendo la siguiente integral doble (queda a cargo del alumno terminar las cuentas):

$$V = \int_{-1}^{2} \int_{2-x}^{4-x^2} x^2 + 4 \, dy \, dx$$