CALCULO 2: Ejercicios resueltos (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

Sección 17.2: Evaluación de integrales dobles (Pág. 875): 4, 6, 7, 13, 17, 20, 23, 25, 27, 33, 34, 39, 42

Ejercicio 4: Evalúe la integral iterativa

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^3}^{x+1}(3x+2y)\,dy\,dx$$

Observemos que el orden "dy dx" hace referencia a que primero integro respecto de *y*, considerando a *x* como una constante. Puede ser útil escribirlo de la siguiente manera:

$\int_{-1}^{1}\left[\int_{x^3}^{x+1}(3x+2y)\,dy\right]dx.$

$$\int_{-1}^{1}\left[\int_{x^3}^{x+1}(3x+2y)\,dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[3xy+2\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^3}^{y=x+1}dx$$

$$\int_{-1}^{1}[3x(x+1)+(x+1)^2]-[3x(x^3)+(x^3)^2]dx = \int_{-1}^{1}-x^6-3x^4+4x^2+5x+1\ dx$$

Una vez que integramos con respecto a *y*, y aplicamos la regla de Barrow, recién ahí pasamos a integrar con respecto a la variable *x*

$\int_{-1}^{1}-x^6-3x^4+4x^2+5x+1\ dx = \left[-\frac{x^7}{7}-3\ \frac{x^5}{5}+4\ \frac{x^3}{3}+5\ \frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1} = \frac{334}{105}$ (hacer las cuentas correspondientes para verificar resultado)

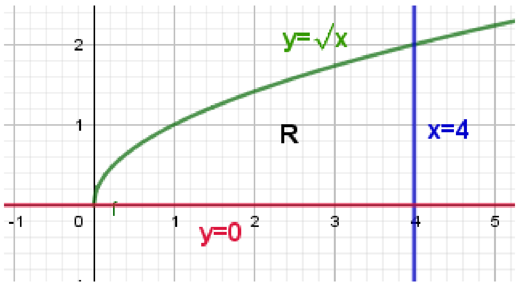
Observar:

- Cuando integro con respecto a una variable, la otra actúa como constante.
- La primera integral con sus límites y el *dx* lo mantengo hasta que integro con respecto a esa variable *x*.
- Al hacer la primera integración, antes de aplicar la regla de Barrow, puede ser útil colocar qué variable voy a reemplazar, por ejemplo $y=x+1$ y $y=x^3$ a fin de evitar confusión a la hora de reemplazar.
- **A partir de acá el resto de los contenidos a ver incluyen integrales. Si no recuerdas como integrar con una variable (cálculo 1) sugiero que repases o revises los temas correspondientes a fin de facilitarte el trabajo en los temas venideros.**

Ejercicio 13: Esquematice la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y exprese $\iint_R\ f(x,y)dA$ como una integral iterativa mediante (a) el Teorema 17.8 i), y (b) el Teorema 17.8 ii)

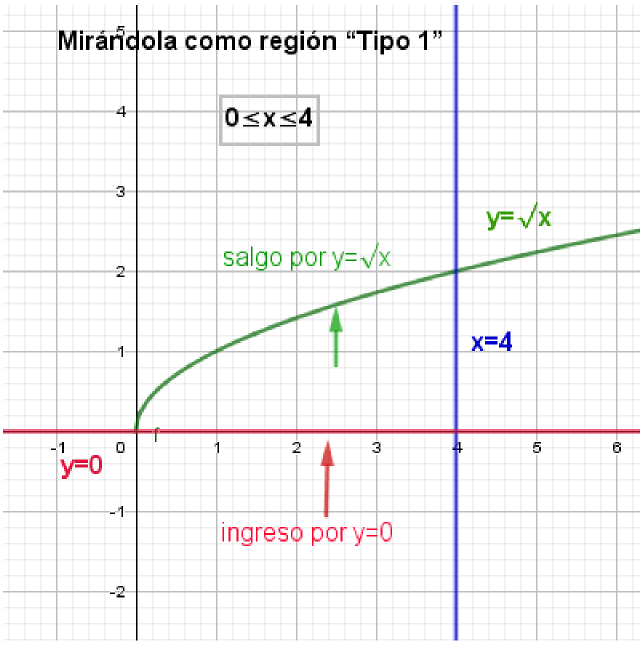
$y=\sqrt{x}\ ,\ x=4\ ,\ y=0$

En el siguiente gráfico se representa la región R encerrada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$



(a) Para plantear la integral mediante el teorema 17.8 (i) debemos mirar a la región como una "región de tipo I", esto es una región donde la variable *x* se mueve entre valores constantes, y la variable *y* entre dos funciones de *x*, $g_1(x)$ y $g_2(x)$.

Observando la región vemos que $0 \le x \le 4$, y para buscar los límites de la otra variable podemos pensar así: Con la *x* entre 0 y 4 "camino, ingreso, entro" a la región empezando desde los *y* negativos hacia los positivos. Debo preguntarme ¿Qué ecuación encuentro al ingresar? ¿Qué ecuación encuentro al salir? O bien ¿cuál de los límites de la región es el primero que encuentro? ¿y cuál el segundo? La respuesta a estas preguntas serán los límites buscados para la integral. El gráfico ayudará a esta idea.



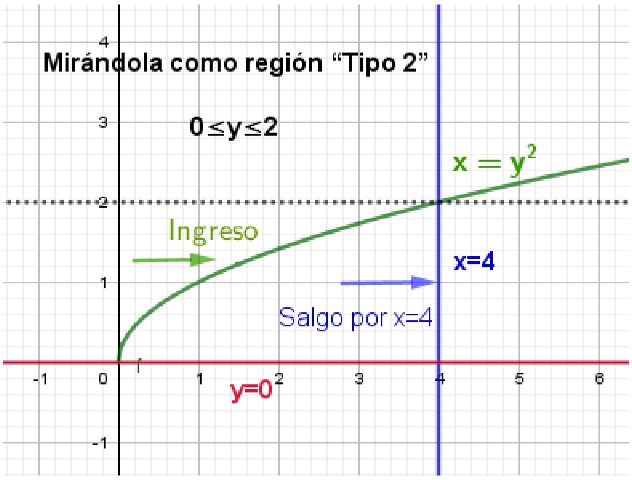
Una vez establecido que

$0 \le x \le 4$ y $0 \le y \le \sqrt{x}$

Pasamos a plantear la integral pedida: $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy\, dx$

(b) Para plantear la integral mediante el teorema 17.8 (ii) debemos mirar a la región como una "región de tipo II", esto es una región donde la variable *y* se mueve entre valores constantes, y la variable *x* entre dos funciones de *y*, $h_1(y)$ y $h_2(y)$. ¡Atención! En este caso tienen que ser funciones de *y*, o sea no usaremos $y = \sqrt{x}$, sino que despejaremos *x*: $x = y^2$

Observando la región vemos que $0 \leq y \leq 2$, y para buscar los límites de la otra variable podemos pensar así: Con la *y* entre 0 y 2 "camino, ingreso, entro" a la región empezando desde los *x* negativos hacia los positivos. Debo preguntarme ¿Qué ecuación encuentro al ingresar? ¿Qué ecuación encuentro al salir? O bien ¿cuál de los límites de la región es el primero que encuentro? ¿y cuál el segundo? La respuesta a estas preguntas serán los límites buscados para la integral. El gráfico ayudará a esta idea.



Una vez establecido que

$0 \leq y \leq 2$ y $y^2 \leq x \leq 4$

Pasamos a plantear la integral pedida: $\int_0^2 \int_{\sqrt{x}}^4 f(x, y)\, dx\, dy$

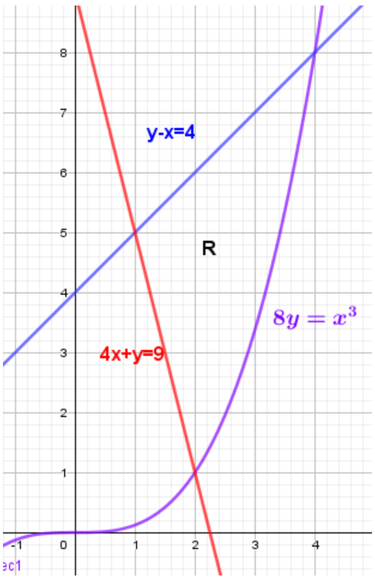
Observar:

- SIEMPRE en la integral de más afuera, se colocan las constantes, números, NUNCA una función de *x* o de *y*.
- El orden *dx dy* o *dy dx* depende de cómo miramos la región. Si es tipo I será *dy dx* y si es tipo II será *dx dy*.

Ejercicio 25: Represente la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Suponiendo que *f(x,y)* es una función continua en R exprese $\iint_R f(x, y) dA$ como una suma de dos integrales iterativas del tipo usado en (a) el Teorema 17.8 i), y (b) el Teorema 17.8 ii).

$8y = x^3$, $y - x = 4$, $4x + y = 9$

La región R sobre la cuál integraremos se presenta a continuación



En este caso, como hemos podido graficar la región, podemos determinar los puntos de intersección de las tres curvas directamente, estos son $(1,5)$, $(2,1)$ y $(4,8)$. Si no tuviéramos conocimiento exacto del gráfico deberíamos resolver los siguientes sistemas para hallar cada uno de estos puntos:

$$\begin{cases} 4x + y = 9 \\ y - x = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8y = x^3 \\ 4x + y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8y = x^3 \\ y - x = 4 \end{cases}$$

(a) Observando la región como una región del tipo I, para aplicar el Teorema 17.8 i) podemos notar que dejando la variable *x* entre constantes, e ingresando a la región desde los valores negativos de *y* hacia los positivos, la curva por la que ingresamos, no es siempre la misma, por lo tanto, tendremos que dividirla en dos:

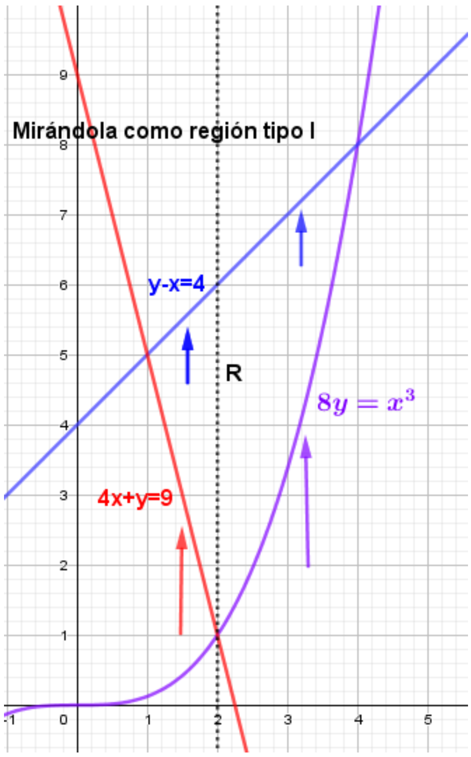
- Cuando *x* varía entre 1 y 2, ingresamos a la región por

$4x + y = 9$ y salimos por $y - x = 4$ (lado izquierdo de la recta punteada). Recordando que este “ingreso” y “salida” deben ser funciones de *x* (por estar mirándola como región tipo I) lo podemos expresar asi:

$$1 \leq x \leq 2 \quad \rightarrow \quad 9 - 4x \leq y \leq 4 + x$$

- Cuando *x* varía entre 2 y 4, ingresamos a la región por la curva $8y = x^3$ y salimos por $y - x = 4$ (lado derecho de la recta punteada). Nuevamente teniendo en cuenta que este ingreso y salida deben ser funciones de *x* lo expresamos asi:

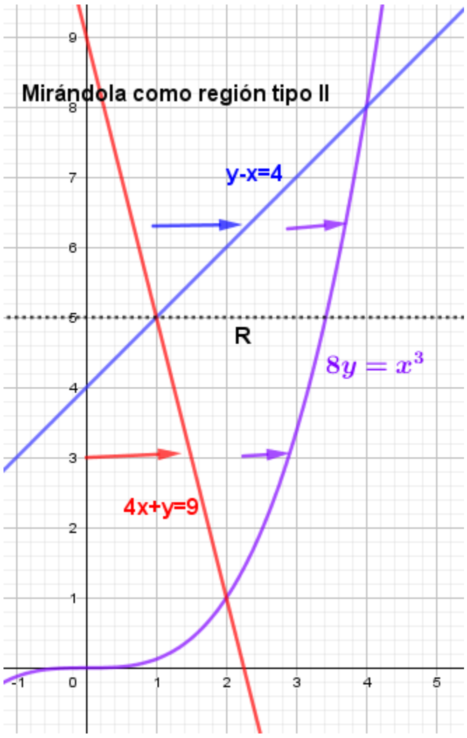
$$2 \leq x \leq 4 \quad \rightarrow \quad \frac{x^3}{8} \leq y \leq 4 + x$$



Ya con la región bien delimitada, la integral iterativa, al expresar la región como una región del tipo I, y utilizando el Teorema 17.8 i), nos queda de la siguiente forma:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_1^2 \int_{9-4x}^{4+x} f(x,y)dy\,dx + \int_2^4 \int_{\frac{x^3}{8}}^{4+x} f(x,y)dy\,dx$$

(b) De manera análoga, al observar la región como una región del tipo II, para aplicar el Teorema 17.8 ii) podemos notar que, dejando la variable *y* entre constantes, e ingresando a la región desde los valores negativos de *x* hacia los positivos (de izquierda a derecha) la curva por la que ingresamos, no es siempre la misma, por lo tanto, tendremos que dividirla en dos:



- Cuando y varía entre 1 y 5, ingresamos a la región por la curva $4x + y = 9$ y salimos por la curva $8y = x^3$ (esto es debajo de la línea punteada) y como la estamos mirando como región tipo II las mismas deben ser función de y, por lo tanto, podemos expresarlo asi:

$$1 \leq y \leq 5 \quad \rightarrow \quad \frac{9-y}{4} \leq x \leq 2\sqrt[3]{y}.$$

- Cuando y varía entre 5 y 8, ingresamos a la región por la curva $y - x = 4$ y salimos por $8y = x^3$. Al expresarlas como una función de y obtenemos:

$$5 \leq y \leq 8 \quad \rightarrow \quad y - 4 \leq x \leq 2\sqrt[3]{y}$$

Luego, la integral iterativa, al expresar la región como una región del tipo II, y utilizando el Teorema 17.8 ii), nos queda de la siguiente forma:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_1^5 \int_{\frac{9-y}{4}}^{2\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx\, dy + \int_5^8 \int_{y-4}^{2\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx\, dy$$