CALCULO 2: Ejercicios resueltos (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

Sección 16.9: Multiplicadores de Lagrange (Pág. 859): 1, 2, 5, 11, 17

Ejercicio 17: Resolver el ejercicio 23 de la sección 16.8 por el método de los multiplicadores de Lagrange:

Establezca la distancia más corta del punto $P(2,1,-1)$ *al plano* $4x-3y+z=5$

Antes que nada, recordemos que la distancia de un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ a otro $Q(x,y,z)$ está dada por la fórmula $d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. Para evitar trabajar con la raíz y alivianar las cuentas, trataremos de minimizar el cuadrado de la distancia; si encontramos el valor donde el cuadrado de la distancia es mínimo, también la distancia será mínima ahí. Entonces trabajaremos con la función $f(x,y,z)=d^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$.

Reemplazando el punto en cuestión, y efectuando las operaciones correspondientes obtenemos:

$$f(x,y,z)=d^2=(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z+6$$

Cuando planteamos la distancia del punto dado, P, a un punto (x,y,z), este punto no es cualquiera, debe ser un punto del plano dado, es decir debe satisfacer que $4x-3y+z=5$. Entonces queremos que la distancia $f(x,y,z)$ sea mínima sujeto a la restricción de que $4x-3y+z-5=0$. Llamemos a esta restricción $g(x,y,z)$.

Resumiendo, tenemos que minimizar la función $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z+6$ sujeto a la restricción $g(x,y,z)=4x-3y+z-5=0$.

Siguiendo el método de los multiplicadores de Lagrange, debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\nabla f(x,y,z)=\mu\nabla g(x,y,z)\\ g(x,y,z)=0\end{cases}$$

Tenemos $\nabla f(x,y,z)=\langle 2x-4,2y-2,2z+2\rangle$ y $\nabla g(x,y,z)=\langle 4,-3,1\rangle$:

$$\begin{cases}\nabla f(x,y,z)=\mu\nabla g(x,y,z)\\ g(x,y,z)=0\end{cases}\to\begin{cases}2x-4=4\mu\\ 2y-2=-3\mu\\ 2z+2=\mu\\ 4x-3y+z-5=0\end{cases}\to\begin{cases}2x-4\mu=4\\ 2y+3\mu=2\\ 2z-\mu=-2\\ 4x-3y+z=5\end{cases}$$

Resolviendo el sistema, por cualquier método (yo recurrí al método de Gauss) obtenemos que la solución del mismo es $\left(\frac{28}{13},\frac{23}{26},\frac{-25}{26},\frac{1}{13}\right)$.

El valor de $\mu = \frac{1}{13}$ no es necesario hallarlo, en este caso, como utilizamos el método de Gauss, lo encontramos, pero puede eliminarse en los pasos de la resolución, lo que interesa son los valores de x, y, z.

Entonces, el punto donde la función alcanza un mínimo es $\left(\frac{28}{13}, \frac{23}{26}, \frac{-25}{26}\right)$ y la menor distancia será $\sqrt{f\left(\frac{28}{13}, \frac{23}{26}, \frac{-25}{26}\right)} = \frac{1}{\sqrt{26}}$ (Recuerde que hemos trabajado con el cuadrado de la distancia, es por eso que no solo evaluamos f en el punto, sino que también debemos calcularle la raíz cuadrada). Este resultado $\frac{1}{\sqrt{26}}$ coincide con lo hallado en el ejercicio 23 de la sección 16.8