# **CALCULO 2: Ejercicios resueltos** (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

## **Sección 16.8: Máximos y Mínimos de funciones de varias variables** (Pág.849): 3, 4, 6, 9, 17, 19, 20, 21, 23, 33

**Ejercicio 3:** Halle los máximos y mínimos de $f(x,y) = x^3 + 3xy - y^3$

Para hallar los extremos de f, si es que tiene, debemos primero hallar los puntos críticos, esto es, puntos donde las derivadas parciales se anulan simultáneamente o donde alguna de ellas no esté definida.

Para ello debemos encontrar las derivadas parciales: $f_x(x,y) = 3x^2 + 3y$ y $f_y(x,y) = 3x - 3y^2$ (ambas son funciones polinómicas, por lo tanto no hay puntos donde no estén definidas), y resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3x - 3y^2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x - y^2 = 0 \end{cases}$$

Despejando de la segunda ecuación obtenemos $x = y^2$, y reemplazando esto en la primera:

$y^4 + y = 0$ . De aquí, $y(y^3 + 1) = 0$, lo cuál indica que $y = 0$ o bien $y = -1$:

- Si $y = 0$ , reemplazando hallamos $x = 0$ y tenemos el punto crítico $(0,0)$.
- Si $y = -1$ , reemplazando hallamos $x = 1$ y tenemos el punto crítico $(1,-1)$.

Una vez hallados los puntos críticos aplicaremos el Criterio para Máximos y Mínimos (16.37) para determinar si son extremos y en caso de serlo, determinar de qué tipo.

Calculemos las derivadas segundas de la función:

$f_{xx}(x,y) = 6x$ , $f_{yy}(x,y) = -6y$ , $f_{xy}(x,y) = 3$

Apliquemos el criterio al punto crítico $(0,0)$:

$f_{xx}(0,0) = 0$ , $f_{yy}(0,0) = 0$ , $f_{xy}(0,0) = 3$

$f_{xx}(0,0) \, . \, f_{yy}(0,0) - \left[f_{xy}(0,0)\right]^2 = 0 - 9 < 0$ , por lo tanto, el punto crítico $(0,0)$ no es un valor extremo.

Apliquemos el criterio al punto crítico $(1,-1)$:

$f_{xx}(1,-1) = 6$ , $f_{yy}(1,-1) = 6$ , $f_{xy}(1,-1) = 3$

$f_{xx}(1,-1) \, . \, f_{yy}(1,-1) - \left[f_{xy}(1,-1)\right]^2 = 6 \, . \, 6 - 9 = 27 > 0$ y $f_{xx}(1,-1) = 6 > 0$ , por lo tanto, el punto crítico $(1,-1)$ es un mínimo local y su valor es $f(1,-1) = -1$.

En conclusión, la función alcanza un mínimo local en el punto $(1,-1)$ y su valor mínimo es $f(1,-1)=-1$.

**Ejercicio 19:** Encuentre el máximo y mínimo absoluto de la función, suponiendo que el dominio es la región indicada R.

$f(x,y)=x^3+3xy-y^3$ ; R es la región triangular con vértices (1,2), $(1,-2)$, $(-1,-2)$

Recuerda que el criterio 16.37 sirve para máximos y mínimos locales, por lo tanto no será eso lo que usaremos para analizar la frontera.

El máximo o mínimo absoluto puede producirse en el interior de la región o en su frontera. Observemos que la función es la misma que trabajamos en el ejercicio 3 y encontramos un mínimo local, el cual se encuentra sobre la frontera que hemos definido en este caso. Entonces sabemos que en el interior no hay extremos locales (que podrían ser absolutos), solo nos queda analizar los bordes de la región.

La región R es una región triangular delimitada por las rectas $C_1{:}\, y=-2$, $C_2{:}\, x=1$, y $C_3{:}\, y=2x$. Trabajaremos sobre cada una de ellas para hallar extremos en la frontera.

- $C_1{:}\, y=-2$: $f(x,-2)=x^3-6x+8$ Estamos ahora en presencia de una función de una variable, con dominio $[-1,1]$:

$f(x)=x^3-6x+8 \quad \rightarrow \quad f'(x)=3x^2-6=0 \quad \rightarrow \quad x^2=2 \quad \rightarrow x=\sqrt{2}, \quad x=-\sqrt{2}$ .
Esto arrojaría los puntos $(\sqrt{2},-2)$ y $(-\sqrt{2},-2)$ Pero cuidado!!!! Estos puntos se ubican sobre la recta $C_1{:}\, y=-2$, pero x no pertenece al dominio de nuestra función de una variable, por lo tanto, no debemos analizarlos. Es decir, sobre la frontera $C_1$ no tenemos candidatos a máximo o mínimo absoluto.

- $C_2{:}\, x=1$: $f(1,y)=1+3y-y^3$ Estamos ahora en presencia de una función de una variable, con dominio $[-2,2]$

$f(y)=1+3y-y^3 \quad \rightarrow \quad f'(y)=3-3y^2=0 \quad \rightarrow \quad y^2=1 \quad \rightarrow y=1, \quad y=-1$

Esto arroja los puntos $(1{,}1)$ y $(1,-1)$. El segundo es el que ya habíamos encontrado en el ejercicio anterior.

- $C_3{:}\, y=2x$: $f(x,2x)=-7x^3+6x^2$ Estamos ahora en presencia de una función de una variable, con dominio $[-1,1]$:

$$f(x)=-7x^3+6x^2 \quad \rightarrow \quad f'(y)=-21x^2+12x=0 \quad \rightarrow \quad x=0, \quad x=\frac{4}{7}$$

Esto arroja los puntos (0,0), y $\left(\frac{4}{7},\frac{8}{7}\right)$.

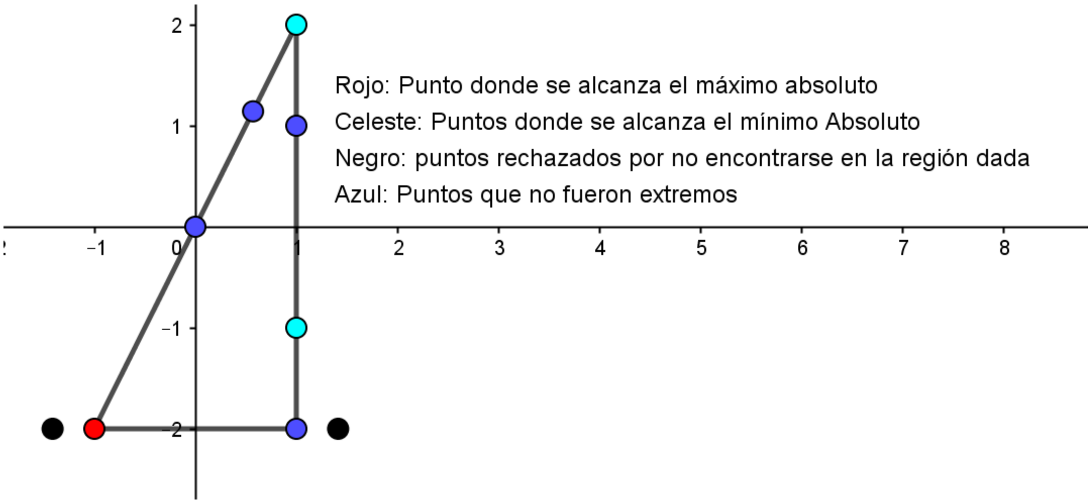
Una vez hallados todos los puntos compararemos el valor de f en ellos, tomando en cuenta también los vértices del triángulo y determinaremos así el máximo y el mínimo absoluto:

| Punto | Valor de f en el punto | |
|---|---|---|
| (1,2) | $f(1{,}2)=-1$ | Mínimo absoluto |
| $(1,-2)$ | $f(1,-2)=3$ | |

| | | |
|---|---|---|
| $(-1,-2)$ | $f(-1,-2) = 13$ | Máximo absoluto |
| $(1,1)$ | $f(1,1) = 3$ | |
| $(1,-1)$ | $f(1,-1) = -1$ | Mínimo absoluto |
| $(0,0)$ | $f(0,0) = 0$ | |
| $\left(\frac{4}{7},\frac{8}{7}\right)$ | $f\left(\frac{4}{7},\frac{8}{7}\right) = \frac{224}{343} \cong 0{,}65$ | |

Por lo tanto, la función dada, considerando como dominio la región triangular R, presenta un mínimo absoluto cuyo valor es -1 y se alcanza en los puntos $(1,2)$ y $(1,-1)$ y un máximo absoluto que se alcanza en el punto $(-1,-2)$ y vale 13.

En el gráfico se muestra la Región R y la ubicación de los puntos hallados y analizados




**Ejercicio 23:** Establezca la distancia más corta del punto P$(2,1,-1)$ al plano $4x - 3y + z = 5$

Antes que nada, recordemos que la distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a otro $Q(x,y,z)$ está dada por la fórmula $d = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$. Para evitar trabajar con la raíz y alivianar las cuentas, trataremos de minimizar el cuadrado de la distancia; si encontramos el valor donde el cuadrado de la distancia es mínimo, también la distancia será mínima ahí. Entonces trabajaremos con la función $f(x,y,z) = d^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$.

Reemplazando el punto en cuestión, y efectuando las operaciones correspondientes obtenemos:

$f(x,y,z) = d^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z + 6$ .

El criterio de máximos y mínimos se aplica para funciones de dos variables, entonces debemos encontrar la forma de trabajar con una función de dos variables, que cumpla con lo pedido.

Al tomar la distancia del punto P a un punto del plano, debemos tener en cuenta que este punto $(x,y,z)$, por estar en el plano, satisface la ecuación $4x - 3y + z = 5$ .De aquí despejamos y hallamos que $z = 5 - 4x + 3y$. Reemplazamos en la función y la reduciremos a una de dos variables x, e y:

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z + 6$

$f(x,y) = 17x^2 + 10y^2 - 52x + 34y - 24xy + 41$ (Verificar esto reemplazando el z despejado)

Una vez hallada la función procedemos buscar los puntos críticos:

$f_x(x,y) = 34x - 52 - 24y = 0$

$f_y(x,y) = 20y + 34 - 24x = 0$

Resolviendo el sistema por cualquier método (yo usé método de Gauss) obtenemos que el único punto crítico es $\left(\frac{28}{13}, \frac{23}{26}\right)$.

Ahora, $f_{xx}(x,y) = 34$ , $f_{yy}(x,y) = 20$, $f_{xy}(x,y) = -24$. Al evaluarlas en el punto hallado nos dará los mismos valores por tratarse de constantes. Entonces como:

$f_{xx}f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 = 34\,.\,20 - 24^2 = 104 > 0$ y $f_{xx} = 34 > 0$ el punto hallado corresponde a un mínimo de la función. El valor de la función en él es $f\left(\frac{28}{13}, \frac{23}{26}\right) = \frac{1}{26}$. Como estamos trabajando con el cuadrado de la distancia, y no con la distancia en sí, lo que resta es calcular la raíz del valor hallado. Así, la mínima distancia entre el punto P y el plano dado es $\sqrt{f\left(\frac{28}{13}, \frac{23}{26}\right)} = \frac{1}{\sqrt{26}}$