Unidad 2: DERIVADAS PARCIALES

PLANOS TANGENTES Y RECTAS NORMALES A SUPERFICIES

Bibliografía principal:

Cálculo con Geometría Analítica (2da Edición)

Autor:

Earl Swokowski

https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

Recordemos de CÁLCULO I / ANÁLISIS MATEMÁTICO I...

Dada una función f de una variable, cuya gráfica es la curva C:

- A medida que se consideran puntos sobre el eje x cada vez más cercanos a un punto fijo en el que f es **diferenciable** (o **derivable**), la parte correspondiente de C se parece más a una recta (la recta tangente en ese punto).
- Entonces, es posible aproximar (localmente) los valores de f mediante los de una función lineal (la que representa a dicha recta).

A continuación, desarrollaremos ideas similares a estas pero en el espacio tridimensional. Concretamente...

Dada una función f de dos variables, cuya gráfica es la superficie S:

- A medida que se consideran puntos sobre el plano xy cada vez más cercanos a un punto fijo en el que f es **diferenciable**, la parte correspondiente de S se parece más a un plano (el plano tangente en ese punto).
- Por lo tanto, es posible aproximar (localmente) los valores de f mediante los de una función lineal de dos variables (la que representa a dicho plano).

Más aún, tales ideas son aplicables a superficies en general, no sólo a las gráficas de funciones de dos variables.

Definición (recta tangente a una superficie)

Una recta l es tangente a una superficie S en el punto P de S si es tangente en P a alguna curva C, contenida en S, que pase por P.

Definición (plano tangente a una superficie)

El plano conformado por todas las rectas tangentes a una superficie S en el punto P de S se llama **plano tangente a S en P**.

El plano tangente en P es el plano que más se aproxima a la superficie S en las cercanías del punto P.

Teorema (16.31)

Sea S una superficie con ecuación $F(x, y, z) = 0$ y sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto de S. Si F tiene primeras derivadas parciales continuas, y estas no son todas nulas en P_0, entonces el vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal al plano tangente a S en P_0.

Demostración del Teorema (16.31)

Sean S, F y P_0 como se describen en las hipótesis del Teorema (16.31).

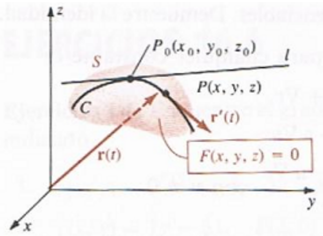
Sea C una curva contenida en S, que pasa por P_0, con ecuaciones paramétricas:

$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

Si $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$, entonces

$\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$

es un vector tangente a C en $P\,(x, y, z)$.



Para cada valor de t que genera un punto (x, y, z) en C, dicho punto está también en S (pues $C \subseteq S$) y, por lo tanto, satisface su ecuación, es decir,

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

Entonces, teniendo en cuenta esto y aplicando la regla de la cadena, obtenemos que para todo t

$$F_x(x, y, z)x'(t) + F_y(x, y, z)y'(t) + F_z(x, y, z)z'(t) = 0$$

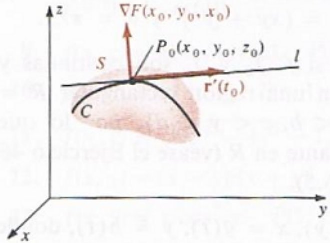
o, equivalentemente,

$$\nabla F\,(x, y, z) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0.$$

En particular, si t_0 es el valor del parámetro correspondiente a P_0, entonces

$$\nabla F\left(x_0, y_0, z_0\right) \cdot \mathbf{r}'\left(t_0\right) = 0,$$

donde (por hipótesis) $\nabla F\left(x_0, y_0, z_0\right) \neq \mathbf{0}$, de lo que se sigue que $\nabla F\left(x_0, y_0, z_0\right)$ es perpendicular a $\mathbf{r}'\left(t_0\right)$ y, por lo tanto, a la recta l tangente a C en P_0.



Como C es una curva arbitraria en S que contiene a P_0, de lo anterior se sigue que $\nabla F\left(x_0, y_0, z_0\right)$ es ortogonal a toda recta tangente a S en P_0, y así, al plano conformado por estas, es decir, al plano tangente a S en P_0 ■

Corolario (16.32)

Bajo las mismas hipótesis (y notaciones) que en el teorema anterior, una ecuación para el plano tangente S en P_0 es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)\left(x - x_0\right) + F_y(x_0, y_0, z_0)\left(y - y_0\right) + F_z(x_0, y_0, z_0)\left(z - z_0\right) = 0.$$

Leer Ejemplo 1 (p.839).

Definición (recta normal a una superficie)

Dada una superficie S y un punto P en el que S tiene un plano tangente, la recta que pasa por P y es perpendicular a dicho plano se llama **recta normal a S en P**.

Teniendo en cuenta el Teorema (16.31) es inmediato argumentar lo sgte.

Teorema

Sea S una superficie con ecuación $F(x, y, z) = 0$ y sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto de S. Si F tiene primeras derivadas parciales continuas, y estas no son todas nulas en P_0, entonces el vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es paralelo a la recta normal a S en P_0.

Corolario

Bajo las mismas hipótesis (y notaciones) que en el teorema anterior, la recta normal a S en P_0 tiene ecuaciones paramétricas

$$x = x_0 + F_x(x_0, y_0, z_0)t,\ y = y_0 + F_y(x_0, y_0, z_0)t,\ z = z_0 + F_z(x_0, y_0, z_0)t,$$
$$t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Leer **Ejemplo 2** *(p.840).*

Opcional: *Leer de las páginas 841 a 843 comentarios y teoremas relativos a los temas desarrollados en esta clase.*