

CALCULO 2: Ejercicios resueltos (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

Sección 16.7: Planos tangentes y rectas normales a superficies (Pág. 843):

Ejercicio 1: Obtenga ecuaciones para el plano tangente y la recta normal a la gráfica de la ecuación dada en el punto P indicado.

$$4x^2 - y^2 + 3z^2 = 10 \quad P(2, -3, 1)$$

Para hallar la ecuación del plano tangente, nos basaremos en el corolario 16.32. Para ello debemos hallar las derivadas parciales y evaluarlas en el punto dado:

$$F_x(x, y, z) = 8x \quad \rightarrow \quad F_x(2, -3, 1) = 16$$

$$F_y(x, y, z) = -2y \quad \rightarrow \quad F_y(2, -3, 1) = 6$$

$$F_z(x, y, z) = 6z \quad \rightarrow \quad F_z(2, -3, 1) = 6$$

Así, siguiendo el corolario 16.32, el plano tangente a la gráfica de $4x^2 - y^2 + 3z^2 = 10$ en el punto $P(2, -3, 1)$ tiene como ecuación

$$F_x(2, -3, 1)(x - 2) + F_y(2, -3, 1)(y - (-3)) + F_z(2, -3, 1)(z - 1) = 0$$

$$16(x - 2) + 6(y + 3) + 6(z - 1) = 0$$

$$16x + 6y + 6z = 20$$

Ahora, teniendo en cuenta el comentario del comienzo de la página 840, la recta normal será paralela al vector normal del plano, es decir, será paralela al vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \langle 16, 6, 6 \rangle$. Entonces con el punto $P(2, -3, 1)$ y el vector director $\langle 16, 6, 6 \rangle$ podemos armar las ecuaciones paramétricas de la recta pedida:

$$\begin{cases} x = 2 + 16t \\ y = -3 + 6t \\ z = 1 + 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 3: Obtenga ecuaciones para el plano tangente y la recta normal a la gráfica de la ecuación dada en el punto P indicado

$$z = 4x^2 + 9y^2 \quad P(-2, -1, 25)$$

En este caso, la superficie está dada de la forma $z = f(x, y)$. Siguiendo el teorema 16.33, el plano tangente tendrá ecuación $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

Entonces:

$$f_x(x, y) = 8x \quad \rightarrow \quad f_x(-2, -1) = -16$$

$$f_y(x, y) = 18y \quad \rightarrow \quad f_y(-2, -1) = -18$$

$$z - 25 = f_x(-2, -1)(x + 2) + f_y(-2, -1)(y + 1)$$

$$z - 25 = -16(x + 2) - 18(y + 1)$$

Operando obtenemos la ecuación del plano tangente $16x + 18y + z = -25$

Este plano tiene como vector normal $\langle 16, 18, 1 \rangle$, para hallar la recta normal procedemos de manera análoga a como lo hicimos en el ejercicio anterior.