CALCULO 2: Ejercicios resueltos (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

Sección 16.6: Derivadas Direccionales (Pág. 836): 2, 5, 8, 13, 21, 22, 25, 26, 28

Ejercicio 13: Calcule la derivada direccional de f en el punto P en la dirección indicada

$f(x,y) = x\,cos^2 y$, $P\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, $\mathbf{a} = \langle 5, 1\rangle$

Para hallar la derivada direccional usaremos el teorema 16.25, para lo cual necesitamos conocer el gradiente de la función en el punto, y un vector unitario en la dirección del vector **a** dado.

Procedamos a calcular el gradiente de f (recordemos que el gradiente de una función de dos variables es un vector cuyas componentes son las derivadas parciales de la función).

Calculemos las derivadas parciales: $f_x = \ cos^2 y$, $f_y = -2x\ cosy\ seny$.

Entonces $\nabla f\ = \langle cos^2 y\ , -2x\ cosy\ seny\rangle$. Luego $\nabla f(2, \pi/4) = \langle \frac{1}{2}\ , -2\rangle$.

Ahora calculemos el vector unitario en la dirección de **a**, para ello calculamos primero el módulo del vector: $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$. Luego $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{26}}\langle 5, 1\rangle = \langle \frac{5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}\rangle$ es el vector unitario buscado.

Ahora sí estamos en condiciones de calcular la derivada direccional como lo indica el teorema 16.25:

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y)\ .\ \mathbf{u}$$

Reemplazando: $D_{\mathbf{u}} f\left(2, \frac{\pi}{4}\right) = \nabla f\left(2, \frac{\pi}{4}\right)\ \cdot\ \mathbf{u} = \langle \frac{1}{2}\ , -2\rangle \cdot\ \langle \frac{5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{26}}$. Este valor indica la razón de cambio de la función en la dirección dada.

Ejercicio 21: $f(x,y) = x^2 e^{-2y}$, $P(2,0), Q(-3,1)$

(a) *Calcule la derivada direccional de f en P, en la dirección de P a Q.*

Procederemos de manera análoga a lo que se hizo en el ejercicio 13. La variación aquí es que nosotros debemos encontrar el vector **a** que nos daban en el ejercicio 13. Nos dicen que la dirección es de P a Q, por lo tanto, el vector **a** es el vector PQ, esto es $\mathbf{a} = \mathrm{Q} - \mathrm{P} = \langle -3 - 2, 1 - 0\rangle = \langle -5, 1\rangle$. Una vez hecho esto, debemos hallar el vector unitario correspondiente $\mathbf{u} = \langle \frac{-5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}\rangle$.

Ahora calculemos el gradiente de f en el punto P: $\nabla f\ = \langle 2xe^{-2y}\ , -2x^2 e^{-2y}\rangle \rightarrow \nabla f(2,0) = \langle 4, -8\rangle$.

Con todo esto: $D_{\mathbf{u}} f(2, 0) = \langle 4, -8\rangle \cdot \langle \frac{-5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}\rangle = -\frac{28}{\sqrt{26}}$.

(b) *Encuentre un vector unitario en la dirección de máximo crecimiento de f en P, y calcule la tasa de crecimiento de f en esa dirección.*

Basándonos en el teorema 16.26, la dirección de máximo crecimiento la da el gradiente de la función en el punto, esto es $\langle 4, -8\rangle$, como me pide un vector unitario en esta dirección, lo que resta hacer es normalizarlo, asi $\|\nabla f\| = \sqrt{80}$ y el vector pedido es $\mathbf{v} = \langle \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \rangle$.

La tasa de crecimiento en esa dirección será $\|\nabla f\| = \sqrt{80}$

***(c)** Encuentre un vector unitario en la dirección en la que f disminuye más rápidamente en P, y calcule la razón de cambio de f en esa dirección.*

Basándonos en el teorema 16.27, la dirección en que f disminuye más rápidamente es la opuesta a la dirección del gradiente de la función en el punto, esto es $\langle -4, 8\rangle$, como me pide un vector unitario en esta dirección, lo que resta hacer es normalizarlo, así $\|\nabla f\| = \sqrt{80}$ y el vector pedido es $\mathbf{v} = \langle -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \rangle$.

La razón de cambio en esa dirección será $-\|\nabla f\| = -\sqrt{80}$.

Ejercicio 25: La temperatura T en un punto (x, y) de una placa de metal, colocada en el plano xy es inversamente proporcional a la distancia al origen. La temperatura en el punto $P(3,4)$ es de 100°. Calcule la razón de cambio de T en la dirección del vector $\mathbf{i} + \mathbf{j}$. ¿En qué dirección aumentará más rápidamente T en P? ¿En qué dirección disminuye más rápidamente T en P? ¿En qué dirección se anula la tasa de variación?

Observemos que aquí no nos especifica de forma explícita la fórmula de la función temperatura, debemos hallarla antes de entrar de lleno con otros cálculos:

Empecemos analizando la siguiente frase: "La temperatura T en un punto (x, y) de una placa de metal, colocada en el plano xy es *inversamente proporcional* a la distancia al origen":

Dos variables son inversamente proporcionales si al aumentar una, la otra disminuye en la misma proporción, expresándolo en lenguaje matemático, si le llamamos T a la temperatura y d a la distancia al origen, esto sería $T = \frac{k}{d}$ donde k es una constante. Recordemos que la distancia desde un punto (x, y) al origen la obtenemos haciendo $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por lo tanto, nuestra función temperatura está dada por la fórmula $T(x, y) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

El dato "La temperatura en el punto $P(3,4)$ es de 100°" nos permitirá hallar el valor de la constante k, reemplazando los valores por sus correspondientes:

$$T(3,4) = 100 \to 100 = \frac{k}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \to k = 500$$

Entonces nuestra función es $T(x, y) = \frac{500}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y ahora estamos en condiciones de responder a lo pedido.

Calcule la razón de cambio de T en la dirección del vector $\mathbf{i} + \mathbf{j}$: Aquí nos están pidiendo la derivada direccional de T en la dirección del vector dado $\mathbf{a} = \langle 1, 1\rangle$.

Al igual que en los ejercicios anteriores buscaremos el gradiente de T en el punto $P(3,4)$, el vector unitario $\mathbf{u}$ que nos indica la dirección y utilizaremos el teorema 16.25 para hallar lo pedido:
$\nabla T(3,4) = \langle -12, -16 \rangle$, $\mathbf{u} = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$, $D_{\mathbf{u}} T(3,4) = \langle -12, -16 \rangle \cdot \langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle = -\frac{28}{\sqrt{2}}$

¿En qué dirección aumentará más rápidamente T en P? Según teorema 16.26 T aumentará más rápidamente en la dirección del gradiente, es decir $\langle -12, -16 \rangle$.

¿En qué dirección disminuye más rápidamente T en P? Según teorema 16.27 T disminuirá más rápidamente en dirección opuesta al gradiente, es decir $\langle 12,16 \rangle$.

¿En qué dirección se anula la tasa de variación?

Observemos que la tasa de variación, $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \, . \, \mathbf{u}$, es un producto punto el cuál será nulo cuando los vectores sean perpendiculares, es decir que la tasa de variación se anulará siempre que la dirección que tome sea perpendicular al gradiente de la función en el punto.

$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \, . \, \mathbf{u} = 0 \rightarrow \langle -12, -16 \rangle \cdot \langle u_1, u_2 \rangle = 0 \rightarrow -12u_1 - 16u_2 = 0$

Operando: $-3\, u_1 = 4\, u_2$. Esto se satisface eligiendo $u_1 = 4, u_2 = -3$ o múltiplos.

Por lo tanto, para que la razón de cambio sea nula debemos tomar la dirección del vector $\mathbf{a} = \langle -3,4 \rangle$, cualquier múltiplo de este de la forma $\mathbf{a} = c\langle -3,4 \rangle$ con $c \neq 0$ tendrá dicho efecto.