Unidad 2: DERIVADAS PARCIALES

DERIVADAS DIRECCIONALES

Bibliografía principal:

Cálculo con geometría analítica
(2da Edición)

Autor:

Earl Swokowski

https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

Consideremos una función de dos variables, $z = f(x, y)$, con dominio D.

Recordemos... Hemos definido las **derivadas parciales** de f como

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

y

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

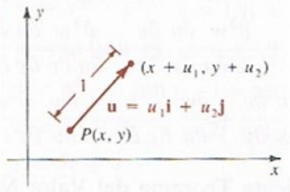
en cada punto (x, y) en D donde estos límites existen, pudiendo interpretarse como las razones de cambio o tasas de variación (instantáneas) de w (o de f) en (x, y) en las direcciones de los ejes x e y respectivamente, es decir, en las direcciones de los vectores unitarios $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$.

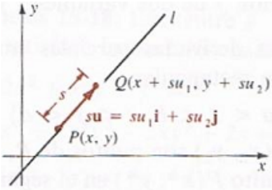
A continuación estudiaremos una clase de derivadas (que incluye a las parciales) que permite calcular las razones de cambio de f en cualquier dirección: las **derivadas direccionales**.

Sea $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ un vector unitario (con cualquier dirección).

Procederemos a definir las razones de cambio (media e instantáneas) de f con respecto a la distancia en la dirección determinada por $\mathbf{u}$.

- Supongamos que $\mathbf{u}$ se representa en el plano con punto inicial $P(x, y)$.
- Su punto final tiene, entonces, coordenadas $(x + u_1, y + u_2)$.
- Sea l la recta que pasa por P y tiene la misma dirección que $\mathbf{u}$, y sea Q cualquier otro punto en l.
- El vector $\overrightarrow{PQ}$ es, entonces, un múltiplo escalar de $\mathbf{u}$ (pues es paralelo a $\mathbf{u}$), digamos $\overrightarrow{PQ} = s\mathbf{u} = \langle su_1, su_2 \rangle$, con $s \in \mathbb{R}$.





- Como $\mathbf{u}$ es un vector unitario: $\left\| \overrightarrow{PQ} \right\| = \| s\mathbf{u} \| = |s| \, \|\mathbf{u}\| = |s|$.
  - Por lo tanto, s es la distancia (con signo) desde P hasta Q, medida a lo largo de l.

Con lo anterior en mente... Si la posición de un punto varía de $P(x, y)$ a $Q\,(x + su_1, y + su_2)$, entonces el **incremento** de $z = f\,(x, y)$ es

$$\Delta z = f\,(x + su_1, y + su_2) - f(x, y).$$

Luego, la **razón media de cambio** de $z = f\,(x, y)$ (con respecto a la distancia) es

$$\frac{\Delta z}{s} = \frac{f\,(x + su_1, y + su_2) - f(x, y)}{s}.$$

Por lo tanto, para determinar la **razón de cambio instantánea** de f en P, se debe tomar el límite del cociente anterior cuando la distancia s tiende a 0. Esto motiva la siguiente definición.

Definición (16.22)

Sea $f\,(x, y)$ una función con dominio D, y sea $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ un vector unitario. La **derivada direccional de f en** *$P\,(x, y)$ (P perteneciente al interior de D)* **en la dirección de $\mathbf{u}$** *es*

$$D_{\mathbf{u}} f\,(x, y) = \lim_{s \to 0} \frac{f\,(x + su_1, y + su_2) - f\,(x, y)}{s},$$

cuando este límite existe.

Nota: Si **a** es cualquier vector con la misma dirección que el vector unitario **u**, también podemos decir que $D_{\mathbf{u}}f\,(x,y)$ es la **derivada direccional de** f **en la dirección de a**. (No obstante, la definición correspondiente requiere, para ser aplicada, utilizar un vector *unitario*.)

Observemos... Aplicando la definición anterior con el vector unitario $\mathbf{u}=\mathbf{i}=\langle 1,0\rangle$ tenemos que

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{i}}f\,(x,y) &= \lim_{s\to 0}\frac{f\,(x+s\cdot 1,y+s\cdot 0)-f(x,y)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{f\,(x+s,y)-f(x,y)}{s} \\ &= f_x(x,y), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene recordando la Definición (16.7). Procediendo análogamente, con $\mathbf{u}=\mathbf{j}=\langle 0,1\rangle$ resulta

$$D_{\mathbf{j}}f\,(x,y)=f_y(x,y).$$

Por lo tanto, las derivadas parciales de f son casos particulares de sus derivadas direccionales.

Para obtener derivadas direccionales de una función que está definida mediante una fórmula explícita se puede...

- ...utilizar la definición (16.22) (*calcular el límite correspondiente*),

(o bien)

- ...utilizar el siguiente teorema (*cuando sus hipótesis lo permitan*).

Teorema (16.23)

Si f es una función de las variables x e y que es diferenciable en un punto $P(x, y)$, entonces para cualquier vector unitario $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ se satisface

$$D_{\mathbf{u}} f\,(x, y) = f_x(x, y)u_1 + f_y(x, y)u_2.$$

Demostración **Todas las carreras:** estudiar de las p.829-830 (p/ *final*) ■

Leer **ejemplo 1** (p.830).

Observemos... Si el vector unitario $\mathbf{u}$ forma un ángulo θ con el semieje x positivo, entonces se puede escribir $\mathbf{u} = \langle \cos\,\theta, \operatorname{sen}\,\theta \rangle$ (*coordenadas polares*) y así, la fórmula del teorema anterior se transforma en

$$D_{\mathbf{u}} f\,(x, y) = f_x(x, y)\cos\,\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\,\theta.$$

Nota: El Teorema (16.23) proporciona una fórmula que permite calcular, en cualquier punto en el que una función es diferenciable, todas sus derivadas direccionales, quedando establecida (indirectamente) la existencia de las mismas. El recíproco de esta implicación no es válido, es decir, aún cuando existan las derivadas en todas las direcciones, no se puede garantizar diferenciabilidad (*considerar el siguiente ejemplo*).

La función f dada a continuación admite derivada direccional en $(0,0)$ para toda dirección y, sin embargo, no es diferenciable en $(0,0)$:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Sugerencia: *Leer el ejemplo que se adjunta a continuación, el cual ilustra una manera de aproximar las derivadas direccionales (y parciales) cuando no se cuenta con una fórmula explícita de la función de interés.*

En el mapa del clima de la figura 1, se muestra un mapa de contorno de la función temperatura $T(x, y)$ para los estados de California y Nevada a las 3:00 PM, de un día de octubre. Las curvas de nivel o isotermas, unen localidades con la misma temperatura. La derivada parcial T_x en un lugar como Reno es la razón de cambio de la temperatura respecto a la distancia si viajamos hacia el este desde Reno; T_y es la razón de cambio de la temperatura si viajamos hacia el norte. Pero, ¿qué sucede si queremos saber la razón de cambio de la temperatura cuando viaja hacia el sureste; es decir, hacia Las Vegas, o en alguna otra dirección?

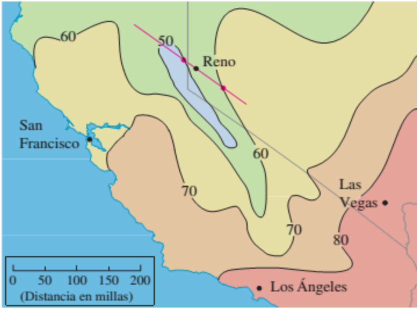
FIGURA 1

EJEMPLO

Con la ayuda del mapa climático ilustrado en la Figura 1, estimar el valor de la derivada direccional de la función que da la temperatura en Reno, en la dirección sureste.

Solución

El vector unitario dirigido hacia el sureste es $\mathbf{u} = (\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$, pero no es necesario recurrir a esta expresión. Inicie dibujando una recta que pase por Reno y que se dirija hacia el sureste



Aproximamos a la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}T$ mediante el promedio de la razón de cambio de la temperatura entre los puntos donde la recta interseca las isotermas $T = 50$ y $T = 60$. La temperatura en el punto al sureste de Reno es $T = 60$ °F y la temperatura en el punto noroeste de Reno es $T = 50$ °F. Al parecer, la distancia entre estos puntos es de casi 75 millas. De este modo, la razón de cambio de la temperatura en la dirección sureste es

$$D_{\mathbf{u}}T \approx \frac{60 - 50}{75} = \frac{10}{75} \approx 0.13 \text{ °F/mi}$$

Observemos... La fórmula establecida en el Teorema (16.23) se puede expresar también como el producto escalar de dos vectores:

$$D_{\mathbf{u}}f\,(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle \cdot \langle u_1, u_2\rangle\,.$$

El primer vector en el producto anterior es muy importante, dado que surge en numerosas aplicaciones, por lo que recibe un nombre y una notación especiales.

Definición

Sea f una función de las variables x e y. El **gradiente** *de f, denotado por ∇f, es la función vectorial de dos variables*

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle\,.$$

Entonces, cuando f es diferenciable, para obtener su derivada direccional en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u}$, se calcula el producto escalar del gradiente de f con $\mathbf{u}$, esto es,

$$\boxed{D_{\mathbf{u}}f\,(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot \mathbf{u}.}$$

Leer **ejemplo 2** (p.831).

MAXIMIZACIÓN DE LAS DERIVADAS DIRECCIONALES

Dada una función f de dos variables, un vector unitario $\mathbf{u}$ y y un punto $P(x, y)$, la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$, si existe, da (como vimos antes) la razón de cambio de f en P en la dirección determinada por $\mathbf{u}$. Dicha derivada puede ser:

- *positiva*, indicando que f aumenta en esa dirección (en un entorno de P);
- *negativa*, indicando que f disminuye en esa dirección (en un entorno de P);
- *cero* (no existe, en esa dirección, un entorno de P en el que f sea creciente o decreciente).

Consideremos ahora todos los vectores unitarios en cuya dirección existe la derivada direccional de f en P. Cabe plantearnos las siguientes preguntas:

1. ¿En cuál de estas direcciones f cambia más rápido (en P)?
2. ¿Cuál es la máxima razón de cambio (en P)?

Ambas respuestas se encuentran en el siguiente teorema, conocido como **Teorema del gradiente**.

Teorema (16.26 y 16.27)

Sea f una función de dos variables que es diferenciable en el punto $P(x, y)$.

(i) *La* **máxima tasa** *(o* **razón***)* **de crecimiento de** f **en** P*, es decir, el valor máximo de* $D_{\mathbf{u}}f\,(x, y)$*, se alcanza cuando* **u** *es el vector unitario con la misma dirección que* $\nabla f(x, y)$*, y es igual a* $\|\nabla f(x, y)\|$*.*

(ii) *La* **máxima tasa** *(o* **razón***)* **de decrecimiento** *(o mínima tasa de crecimiento)* **de** f **en** P*, es decir, el valor mínimo de* $D_{\mathbf{u}}f\,(x, y)$*, se alcanza cuando* **u** *es el vector unitario con la misma dirección que* $-\nabla f(x, y)$*, y es igual a* $-\|\nabla f(x, y)\|$*.*

Demostración

Todas las carreras: estudiar de las p. 832-833 (p/ *parcial*)■

Leer **ejemplo 3** (p.833).

La teoría desarrollada en esta clase se puede generalizar (en forma análoga) **para funciones de tres o más variables.** Leer **Definición (16.28)** y los comentarios y ejemplos que le siguen (p. 834 y 835).