CALCULO 2: Ejercicios resueltos (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

Sección 16.5: Regla de la cadena

(Pág. 825): 1, 4, 5, 7, 15, 19, 22, 23, 25, 26, 27, 28

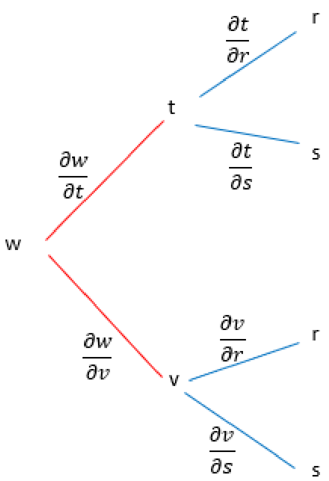
Ejercicio 4: Utilice la regla de la cadena para hallar $\frac{\partial w}{\partial r}$ y $\frac{\partial w}{\partial s}$

$w = e^{tv}\ ;\ t = r + s : v = rs$

Observemos que w es una función que depende de t y v, y a su vez cada una de ellas depende de otras variables r y s.

Entonces, para hallar las derivadas pedidas debemos calcular, respectivamente:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$$



Calcularemos solo $\frac{\partial w}{\partial r}$, la otra es análoga.

Calculemos las derivadas correspondientes y reemplacemos:

$\frac{\partial w}{\partial t} = e^{tv}v\ ;\ \ \frac{\partial w}{\partial v} = e^{tv}t$

$\frac{\partial t}{\partial r} = 1\ ;\ \ \frac{\partial v}{\partial r} = s$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r} = e^{tv}v\,.\,1 + e^{tv}t\,.\,s$$

Ahora escribamos todo en términos de las variables r y s, y operemos:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = e^{(r+s)rs}rs + e^{(r+s)rs}(r+s)s = se^{(r+s)rs}(2r+s)$$

Ejercicio 19: Encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ suponiendo que $z = f(x, y)$ satisface la ecuación dada:

$2z^3 - 3yz^2 + x^2y^2 + 4z = 0.$

En este caso tenemos una ecuación $F(x, y, z) = 0$ que determina implícitamente una función de dos variables $z = f(x, y)$. Siguiendo el Teorema 16.21 podemos hallar lo pedido haciendo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

Calculemos entonces F_x , F_y , F_z

$F_x = 2z^3 - 2xy^2$; $F_y = -3z^2 + 2x^2y$; $F_z = 6xz^2 - 6yz + 4$

Así $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{2z^3-2xy^2}{6xz^2-6yz+4}$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = \frac{-3z^2+2x^2y}{6xz^2-6yz+4}$.

Ejercicio 23: El radio r y la altura h de un cilindro circular recto aumentan a razón de $0{,}01\ cm/min$ y $0{,}02\ cm/min$ respectivamente. Use la regla de la cadena para calcular la tasa de crecimiento del volumen con respecto al tiempo, cuando $r = 4\ cm$ y $h = 7\ cm$. ¿Con qué rapidez varía el área de la superficie curva?

- El Volumen de un cilindro circular recto, que depende de su radio y de su altura se obtiene mediante la fórmula $V(r, h) = \pi\, r^2 h$.
- El dato de que el radio aumenta a razón de $0{,}01\ cm/min$ lo escribimos en lenguaje matemático como $\frac{dr}{dt} = 0{,}01\ cm/min$ (recuerde que la derivada es una razón de cambio)
- El dato de que la altura aumenta a razón de $0{,}02\ cm/min$ lo escribimos en lenguaje matemático como $\frac{dh}{dt} = 0{,}02\ cm/min$
- El volumen cambia a medida que cambia el radio y la altura, y cada uno de estos cambia con el paso del tiempo. Por lo tanto, la tasa de crecimiento del volumen con respecto al tiempo podemos expresarla como $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}$.

Calculemos las parciales: $\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi rh$, $\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$.

Entonces $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} = 2\pi rh\ .\ 0{,}01 + \pi r^2\ .\ 0{,}02.$

Cuando $r = 4\ cm$ y $h = 7\ cm$ tenemos que la tasa de crecimiento del volumen con respecto al tiempo es $\frac{dV}{dt} = 0{,}88\pi\ cm^3/min.$

Para la segunda parte:

- La superficie del cilindro la podemos calcular como $A(r, h) = 2\pi rh + 2\pi r^2$

- La superficie cambia en función del radio y la altura, y estos, a su vez cambian en función del tiempo, por lo tanto: $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial A}{\partial h}\frac{dh}{dt}$

Procedamos de manera análoga a lo anterior:

Calculemos las parciales: $\frac{\partial A}{\partial r} = 2\pi h + 4\pi r$, $\frac{\partial A}{\partial h} = 2\pi r$ y reemplacemos:

$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial A}{\partial h}\frac{dh}{dt} = (2\pi h + 4\pi r).\,0{,}01 + 2\pi r\;.\,0{,}02$

Cuando $r = 4\ cm$ y $h = 7\ cm$ tenemos que la tasa de crecimiento del área de la superficie es

$\frac{dA}{dt} = 0{,}46\pi\ cm^2/min.$