Unidad 2: DERIVADAS PARCIALES

INCREMENTOS Y DIFERENCIALES

Bibliografía principal:

Cálculo con geometría analítica
(2da Edición)

Autor:

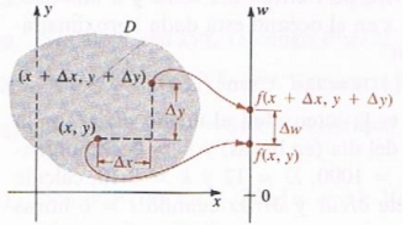
Earl Swokowski

https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

- Consideremos una función de dos variables, $w = f(x, y)$, con dominio D.
- Dado (x, y) en D, supongamos que:
  - x cambia a $x + \Delta x$ (Δx es el **incremento de la v. independiente** x)
  - y cambia a $y + \Delta y$ (Δy es el **incremento de la v. independiente** y)
  - $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ pertenece también a D
- El **incremento** correspondiente **de la variable dependiente** es

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

  es decir, Δw representa el cambio en el valor de f cuando (x, y) varía a $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.



Leer **ejemplo 1** (p. 810).

Nota: La fórmula anterior para Δw sólo sirve para calcular la diferencia entre los valores de la función en dos puntos, pero no resulta adecuada para analizar la su variación de un modo más general. El siguiente teorema, en cambio, proporciona una fórmula más útil en las aplicaciones.

Teorema (16.12)

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función definida sobre una región rectangular (abierta) $R = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\}$, tal que f_x y f_y existen en toda R y son continuas en el punto (x_0, y_0) de R. Si el punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ está también en R y

$$\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

entonces

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

donde ε_1 y ε_2 son funciones de Δx y Δy que tienden a 0 cuando $(\Delta x, \Delta y)$ tiende a $(0, 0)$.

Demostración **Matemáticos:** leer de las p. 811 y 812 ■

Leer **ejemplo 2** (p. 812).

Recordemos... En CÁLCULO I / ANÁLISIS MATEMÁTICO I se definieron las diferenciales de las funciones de una variable como sigue: si $u = f(x)$ y Δx es un incremento de x, entonces

$$dx = \Delta x \text{ y } du = f'(x)dx = f'(x)\Delta x.$$

La siguiente definición generaliza este concepto a funciones de dos variables.

Definición (16.13)

Sea $w = f(x, y)$ y sean Δx y Δy incrementos de x e y, respectivamente.

- *Las* **diferenciales** dx **y** dy **de las variables independientes** x *e* y *son*

$$dx = \Delta x \qquad y \qquad dy = \Delta y.$$

- *La* **diferencial** dw **de la variable dependiente** w *es*

$$dw = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy.$$

Observación:

Combinando esta definición con el teorema anterior, encontramos que, cuando f satisface las hipótesis del mismo (y evaluando dw en (x_0, y_0)),

$$\Delta w = dw + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

donde tanto ε_1 como ε_2 tienden a 0 cuando Δx y Δy tienden a 0. Entonces, si Δx y Δy son pequeños, ocurre que $\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \approx 0$ y así

$$\Delta w \approx dw.$$

Este hecho puede utilizarse para calcular aproximadamente (mediante una fórmula más manejable) el cambio en w producido por cambios pequeños de x e y.

Leer **ejemplo 3** (p. 813) y **ejemplo 4** (p. 814).

Recordemos... Para una función de una sola variable, decir que es *diferenciable* es lo mismo que decir que es *derivable*, esto es, que existe su derivada.

Para las funciones de dos o más variables no ocurre lo mismo.

En el caso de las funciones de dos variables se utiliza la siguiente definición de diferenciabilidad, la cual está basada en la fórmula para Δw dada en el teorema previo (16.12).

Definición (16.14)

Sea $w = f(x, y)$. *Se dice que* f *es* **diferenciable en un punto** (x_0, y_0) *si* Δw *se puede expresar en la forma*

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 *y* ε_2 *tienden a* 0 *cuando* $(\Delta x, \Delta y)$ *tiende a* $(0, 0)$.

Relativo a la definición anterior:

Se dice que f *es* **diferenciable en una región** R *del plano* xy *si es diferenciable en todos los puntos de* R.

El siguiente teorema proporciona una *condición suficiente* para garantizar la diferenciabilidad de funciones de dos variables. Dicha condición, cuando es aplicable, a menudo resulta más fácil de comprobar en la práctica que la dada en la definición anterior.

Teorema (16.15*)

Sea f una función de las variables x e y definida sobre una región rectangular abierta R. Si f_x y f_y existen en toda R y son continuas en el punto (x_0, y_0) de R, entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

Demostración Es una consecuencia directa del Teorema (16.12) y de la Definición (16.14) ■

*El teorema anterior es una formulación "puntual" del Teorema (16.15) de la p. 814, el cual puede considerarse una consecuencia inmediata de este.

EJEMPLO: Consideremos la función analizada en los Ejemplos 1 y 2,

$$w = f(x, y) = 3x^2 - xy,$$

cuyas derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = 6x - y \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = -x.$$

Mostraremos de dos maneras diferentes que f es diferenciable en el punto $(1, 0)$. En efecto:

1. Por Definición (16.14) Teniendo en cuenta la definición de Δw y los valores de f_x y f_y en $(1, 0)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(1 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(1, 0) \\ &= \left[3(1 + \Delta x)^2 - (1 + \Delta x)\Delta y\right] - 3 \\ &= 6\Delta x - \Delta y + (\Delta x)^2 - \Delta x \Delta y \\ &= f_x(1, 0)\Delta x + f_y(1, 0)\Delta x + \Delta x \Delta x + \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

y así, haciendo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \Delta x$, vemos que se verifica la condición establecida en la Definición (16.14), quedando probada la diferenciabilidad de f en el punto $(1, 0)$.

2. Por Teorema (16.15*) Basta con observar que f_x y f_y son funciones polinómicas y, por lo tanto:

- están definidas en todo $\mathbb{R}^2$, y así, en cualquier rectángulo abierto R que contenga al punto $(1, 0)$,
- son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, en particular, en el punto $(1, 0)$;

luego, dado que se verifican las hipótesis del Teorema (16.15*) se concluye que f es diferenciable en $(1, 0)$.

Nota: En este caso, las ecuaciones obtenidas en 1 pueden reproducirse en general para cualquier punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$ (recordemos que así se hizo en el Ejemplo 2), y lo mismo ocurre con el razonamiento explicado en 2. Por lo tanto, se puede demostrar (por cualquiera de los dos métodos) que f es diferenciable no sólo en el punto $(1, 0)$ sino en todo $\mathbb{R}^2$.

Teorema (16.16)

Si una función f de dos variables es diferenciable en el punto (x_0, y_0), entonces es continua en (x_0, y_0).

Demostración **Todas las carreras:** estudiar de la p. 815 ■

Corolario (16.17*)

Sea f una función de las variables x e y definida sobre una región rectangular abierta R. Si f_x y f_y existen en toda R y son continuas en el punto (x_0, y_0) de R, entonces f es continua en (x_0, y_0).

Demostración Es una consecuencia directa de los Teoremas (16.15*) y (16.16) ■

*El corolario anterior es una formulación "puntual" del Corolario (16.17) de la p. 815, el cual puede considerarse una consecuencia inmediata de este.

Nota: Se puede demostrar por medio de ejemplos que la simple *existencia* de f_x y f_y no es suficiente (como sí lo es su *continuidad*) para asegurar la continuidad de f. Resolver el **ejercicio 29** de la p. 818. (**Recordemos...** Esto es diferente cuando f es una función de una sola variable, en cuyo caso la existencia de f' implica la continuidad de f.)

La teoría desarrollada en esta clase se puede generalizar (en forma análoga) **para funciones de tres o más variables.** Leer **Definición (16.18)** y comentarios circundantes (p. 815 y 816).