CALCULO 2: Ejercicios resueltos (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

Sección 16.4: Incrementos y Diferenciales

(Pág. 816): 1, 5, 8, 11, 13, 15, 17, 20, 23, 27

Ejercicio 1: Encuentre los valores de ε_1 y ε_2 que satisfacen la definición 16.14

$f(x,y) = 4y^2 - 3xy + 2x$

Primero calculemos las derivadas parciales de f: $f_x = -3y + 2$; $f_y = 8y - 3x$

Consideremos $w = 4y^2 - 3xy + 2x$. Encontremos Δw como lo indica la definición 16.11:

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)\\ &= [4(y + \Delta y)^2 - 3(x + \Delta x)(y + \Delta y) + 2(x + \Delta x)] - [4y^2 - 3xy + 2x]\end{aligned}$$

Operando, haciendo distributiva, cancelando los términos correspondientes, y teniendo en cuenta las derivadas parciales de f y la definición 16.14, que es a la que queremos llegar, obtenemos:

$$\Delta w = (-3y + 2)\Delta x + (8y - 3x)\Delta y + (-3\Delta y)\Delta x + (4\Delta y)\Delta y$$

Vemos que $4\Delta y \to 0$ cuando $\Delta y \to 0$ y $-3\Delta y \to 0$ cuando $\Delta y \to 0$.

Por lo tanto, hemos hallado $\varepsilon_1 = -3\Delta y$ y $\varepsilon_2 = 4\Delta y$ que satisfacen la definición 16.14.

Ejercicio 13: Use diferenciales para calcular aproximadamente la variación en

$$f(x,y) = x^2 - 3x^3y^2 + 4x - 2y^3 + 6$$

cuando (x,y) varía de $(-2,3)$ a $(-2{,}02\ ,\ 3{,}01)$

Consideremos $w = x^2 - 3x^3y^2 + 4x - 2y^3 + 6$.

Notemos que, como (x,y) varía de $(-2,3)$ a $(-2{,}02\ ,\ 3{,}01)$, $dx = \Delta x = -0{,}02$ y $dy = \Delta y = 0{,}01$

Calculemos las derivadas parciales, y evaluémoslas en el punto $(-2,3)$:

$f_x(x,y) = \frac{\partial w}{\partial x} = 2x - 9x^2y^2 + 4$ y $f_y(x,y) = \frac{\partial w}{\partial y} = -6x^3y - 6y^2$

$f_x(-2,3) = -324$ y $f_y(-2,3) = 90$

Con todos estos datos, utilizando la definición 16.13 encontramos:

$dw = f_x(-2,3)dx + f_y(-2,3)dy = -324\,.\,(-0{,}02) + 90\,.\,(0{,}01) = 7{,}38.$

Por lo tanto, la variación de f cuando (x,y) varía de $(-2,3)$ a $(-2{,}02\ ,\ 3{,}01)$ es de 7,38

Ejercicio 15: Los lados de un paralelepípedo rectangular miden 3, 4, y 5 pies, con un error posible de $\frac{1}{16}$ de pulgada. Use diferenciales para estimar el error máximo en el valor calculado de (a) el área de la superficie del paralelepípedo; (b) el volumen de este cuerpo.

Antes que nada, notemos que habla de dos medidas: pie y pulgada. Expresemos todo en una misma unidad: $\frac{1}{16}$ de pulgada = 0,00521 pies. Teniendo en cuenta esto, y llamando a las dimensiones de las aristas del paralelepípedo x, y, z, tenemos que $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0{,}00521$.

(a) La fórmula para hallar el área de la superficie del paralelepípedo es

$A(x, y, x) = 2(xy + xz + yz)$.

Para poder utilizar la definición 16.18 debemos primero encontrar las derivadas parciales de A :

$\frac{\partial A}{\partial x} = 2(y + z)$, $\frac{\partial A}{\partial y} = 2(x + z)$, $\frac{\partial A}{\partial z} = 2(x + y)$

Ahora: $dA = \frac{\partial A}{\partial x}\, dx + \frac{\partial A}{\partial y}\, dy + \frac{\partial A}{\partial z}\, dz = 2(y + z)dx + 2(x + z)dy + 2(x + y)dz$.

Reemplazando *x* por 3, *y* por 4, *z* por 5 y $dx = dy = dz = 0{,}00521$ obtenemos $dA = 0{,}25008\, pie^2$.

(b) Procediendo análogamente:

El volumen del paralelepípedo es $V(x, y, z) = xyz$

$\frac{\partial V}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial V}{\partial y} = xz$, $\frac{\partial V}{\partial z} = xy$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\, dx + \frac{\partial V}{\partial y}\, dy + \frac{\partial V}{\partial z}\, dz = yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz$$

Reemplazando *x* por 3, *y* por 4, *z* por 5 y $dx = dy = dz = 0{,}00521$ obtenemos $dV = 0{,}245\, pie^3$.