

## UNIDAD 3

# DIFERENCIACIÓN EN DOS O MÁS VARIABLES

Bibliografía principal:

Cálculo de varias variables | Trascendentes tempranas  
(7a Edición)

Autor:

James Stewart

<https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com>

**RECORDEMOS:** En CÁLCULO I / ANÁLISIS MATEMÁTICO I se definió la *derivada* de una función  $f(x)$  de una variable como la función

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Esta fórmula puede obtenerse de los siguientes pasos:

- 1 Se incrementa la variable independiente  $x$  en una cantidad  $h$ .
- 2 Se divide entre  $h$  el incremento correspondiente de la variable dependiente, esto es,  $f(x+h) - f(x)$ .
- 3 Se hace tender  $h$  a 0.

A continuación aplicaremos un procedimiento análogo para funciones de varias variables.

Dada una función de dos variables  $f(x, y)$ , si se incrementa una de las variables independientes en una cantidad  $h$ , luego se divide entre  $h$  el incremento correspondiente de la variable dependiente  $y$ , finalmente, se hace tender  $h$  a 0, resultan las fórmulas involucradas en la siguiente definición.

## Definición (PRIMERAS DERIVADAS PARCIALES)

Si  $f$  es una función (real) de dos variables:

- La **derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$**  es la función  $f_x$  dada por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

- La **derivada parcial de  $f$  con respecto a  $y$**  es la función  $f_y$  dada por

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}.$$

## Observaciones:

- Si se mantiene a  $y$  fija y se considera la función de una variable  $g_1(x) = f(x, y)$ :

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_1(x+h) - g_1(x)}{h} = g_1'(x)$$

- Si se mantiene a  $x$  fija y se considera la función de una variable  $g_2(y) = f(x, y)$ :

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_2(y+h) - g_2(y)}{h} = g_2'(y)$$

## Por lo tanto:

- 1 Para determinar  $f_x$ , se trata a  $y$  como una constante y se deriva  $f(x, y)$  con respecto a  $x$ .
- 2 Para determinar  $f_y$ , se trata a  $x$  como una constante y se deriva  $f(x, y)$  con respecto a  $y$ .

Leer **EJEMPLO 1** (p. 803).

**Otras notaciones para las derivadas parciales:** Si  $z = f(x, y)$ :

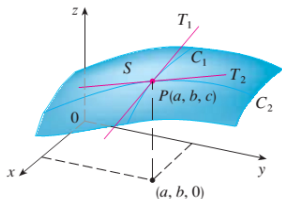
- $f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$
- $f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$

# INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

- Sea  $f$  una función de dos variables y sea  $(a, b) \in \text{dom}(f)$ .
- Sea  $S$  la superficie con ecuación  $z = f(x, y)$  (la *gráfica* de  $f$ ).
- Sea  $c = f(a, b)$ . **Observación:** el punto  $P(a, b, c)$  está sobre  $S$ .
- Sea  $C_1$  la *traza* de  $S$  en el plano vertical  $y = b$ .

## Observaciones:

- $C_1$  pasa por  $P$ .
- $C_1$  es la gráfica de la función de una variable  $g(x) = f(x, b)$ .
- La pendiente de la recta  $T_1$  tangente a  $C_1$  en  $P$  es  $g'(a)$ , es decir,  $f_x(a, b)$ .



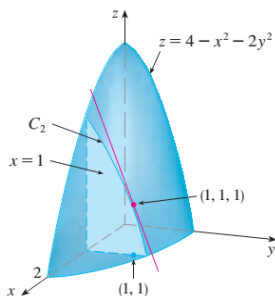
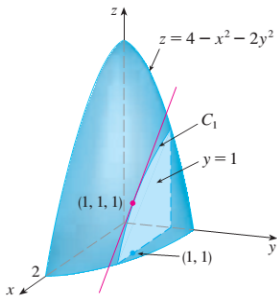
- $f_x(a, b)$  es la **pendiente de la recta tangente en  $P(a, b, c)$  a la traza de  $S$  en el plano  $y = b$ .**

Procediendo análogamente (con la *traza*  $C_2$  de  $S$  en el plano  $x = a$  y la función de una variable  $g(y) = f(a, y)$ ), se llega a que

- $f_y(a, b)$  es la **pendiente de la recta tangente en  $P(a, b, c)$  a la traza de  $S$  en el plano  $x = a$ .**

**EJERCICIO (EJEMPLO):** Para  $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$ , determinar  $f_x(1, 1)$  y  $f_y(1, 1)$  e interpretar estos números como pendientes.

**Solución:** La gráfica de  $f$  es el paraboloides  $z = 4 - x^2 - 2y^2$ , y el plano vertical  $y = 1$  lo interseca en la parábola  $z = 2 - x^2$ ,  $y = 1$  ( $C_1$  en la notación del análisis anterior). La pendiente de la recta tangente a esta parábola en el punto  $(1, 1, 1)$  es  $f_x(1, 1) = -2$ . De la misma manera, la curva  $C_2$  que se forma cuando el plano  $x = 1$  interseca al paraboloides es la parábola  $z = 3 - 2y^2$ ,  $x = 1$ , y la pendiente de la tangente en  $(1, 1, 1)$  es  $f_y(1, 1) = -4$ .

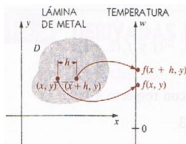


# RAZONES DE CAMBIO

Las derivadas parciales también se pueden interpretar como razones de cambio. Si  $z = f(x, y)$ :

- $f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}$  da la **razón o tasa de cambio (instantánea) de  $z$  respecto a  $x$  cuando  $y$  permanece constante.**
- $f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$  da la **razón o tasa de cambio (instantánea) de  $z$  respecto a  $y$  cuando  $x$  permanece constante.**

**EJEMPLO:** Supongamos que  $f(x, y)$  da la temperatura ( $T^\circ$ ) en cada punto  $(x, y)$  de una lámina de metal plana que se encuentra en un plano coordenado  $xy$ . Si un punto de la lámina “se mueve” horizontalmente desde  $(x, y)$  hasta  $(x + h, y)$ , entonces:



- $f(x + h, y) - f(x, y)$  es el **cambio neto** de la  $T^\circ$ .
- $\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$  es la **variación media** de la  $T^\circ$  (esto es, la razón a la que esta varía, en promedio, por unidad de cambio en la distancia).

Tomando el límite de la variación media cuando  $h$  tiende a 0 se ve que

- $f_x(x, y)$  es la **razón o tasa de cambio instantánea** de la  $T^\circ$  con respecto a la distancia cuando  $(x, y)$  “se mueve” en la dirección del eje  $x$ .

## DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

- Si  $f$  es una función de las variables  $x$  e  $y$ , entonces sus derivadas parciales,  $f_x$  y  $f_y$ , son también funciones de estas dos variables.
- Las derivadas parciales de  $f_x$  y  $f_y$  se llaman **segundas derivadas parciales** de  $f$  o, simplemente, **derivadas segundas** de  $f$ .
- Si  $z = f(x, y)$ , las notaciones más usuales para las derivadas segundas son:

$$\bullet (f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\bullet (f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\bullet (f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$\bullet (f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

- $f_{xy}$  y  $f_{yx}$  se llaman **segundas derivadas parciales mixtas** (o **cruzadas**) de  $f$  o, simplemente, **parciales mixtas** de  $f$ .

Leer **EJEMPLO 4** (p.806-807).

**Observación:** En el ejemplo anterior  $f_{xy} = f_{yx}$ .



Lo observado en el ejemplo anterior no es coincidencia...

Las derivadas parciales cruzadas son iguales para la mayoría de las funciones que se encuentran en la práctica. El siguiente teorema proporciona *condiciones suficientes* para garantizar dicha igualdad.

### Teorema (DE CLAIRAUT)

Sea  $f$  una función de las variables  $x$  e  $y$  que está definida sobre un disco abierto  $D$  que contiene al punto  $(a, b)$ . Si  $f$ ,  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_{xy}$  y  $f_{yx}$  son continuas sobre  $D$ , entonces  $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ .

Podríamos decir que la anterior es una formulación “puntual” del Teorema de Clairaut. Sin embargo, si  $R$  es una región abierta en el plano  $xy$ , dado que todo punto en  $R$  es centro de algún disco abierto contenido también en  $R$ , dicho teorema puede enunciarse también como sigue:

### Teorema (DE CLAIRAUT)

Sea  $f$  una función de las variables  $x$  e  $y$  que está definida sobre una región abierta  $R$ . Si  $f$ ,  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_{xy}$  y  $f_{yx}$  son continuas en  $R$ , entonces  $f_{xy} = f_{yx}$  en  $R$ .

**NOTA:** La demostración del Teorema de Clairaut NO se estudiará en este curso. No obstante, se puede consultar en el apéndice F del libro *Cálculo de varias variables | Transcendentes tempranas | 7ª Ed. de JAMES STEWART*, o en cualquier libro de cálculo avanzado.

También se pueden definir las **derivadas parciales de tercer orden, cuarto orden**, etc. Por ejemplo:

$$f_{xxx} = (f_{xx})_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$
$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$
$$f_{xyyx} = (f_{xyy})_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \right) = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial x}$$

Mediante el Teorema de Clairaut se puede demostrar las siguientes igualdades (y muchas otras que involucran derivadas cruzadas):

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$$
$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

cuando estas funciones son todas continuas.

# ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

En las ecuaciones diferenciales que expresan ciertas leyes físicas, la mayoría de las veces, aparecen derivadas parciales.

Por ejemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(donde  $u$  representa una función de las variables  $x$  e  $y$ ) se llama **ecuación de Laplace**. Sus soluciones reciben el nombre de *funciones armónicas* y desempeñan un importante papel en los problemas de conducción de calor, flujo de fluidos y potencial eléctrico.

**EJERCICIO:** Demostrar que la función  $u(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$  es una solución de la ecuación de Laplace (e.d.,  $u$  satisface dicha ecuación).

Otro ejemplo clásico es la **ecuación de onda**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(donde  $u$  representa una función de las variables  $x$  y  $t$ , y  $a$  es una cte.).

**NOTA:** La teoría desarrollada en esta clase se generaliza de manera análoga para funciones de tres o más variables (salvo la interpretación geométrica de las derivadas parciales). **Leer EJEMPLO 3 y comentarios que le preceden (p. 805).**