UNIDAD 2

DERIVADAS PARCIALES

Bibliografía principal:

Cálculo con Geometría Analítica
(2da Edición)

Autor:

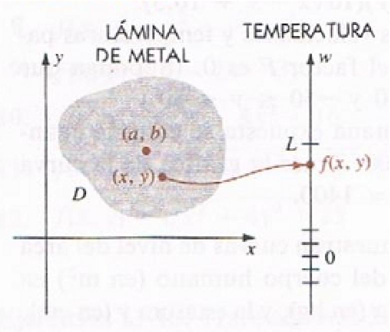
Earl Swokowski

https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

Dada una función (real) f de dos variables, en esta sección nos interesa particularmente analizar el comportamiento del valor $f(x, y)$ cuando (x, y) varía dento del dominio D de f. (Dicho análisis puede realizarse, por analogía, también para funciones de tres o más variables.)

Comentario: A diferencia de lo que ocurre en el *cálculo en una variable* (CÁLCULO I / ANÁLISIS MATEMÁTICO I), ahora hay “infinitas” maneras en las cuales los puntos del dominio pueden “acercarse” a un punto fijo (a, b), ya que dicho conjunto no “vive” en una recta (la recta real) sino en un plano (el plano xy).

EJEMPLO: Supongamos que una lámina de metal plana tiene la forma de la región D de la siguiente figura:



A cada punto (x, y) de la lámina le corresponde una temperatura $f(x, y)$, que se mide con un termómetro y se representa en el eje w. Cuando un punto "se mueve" sobre la lámina, la temperatura correspondiente aumenta, disminuye o permanece constante y, por lo tanto, el punto que la representa en el eje w se mueve en la dirección positiva, en la dirección negativa, o permanece quieto, según el caso.

Si la temperatura $f(x, y)$ se aproxima a un valor fijo L cuando (x, y) se toma cada vez más cerca de un punto fijo (a, b), bien podríamos decir que "la temperatura tiende a L cuando los puntos sobre la lámina tienden a (a, b)".

(OTRO) **EJEMPLO:** Consideremos las siguientes funciones representadas mediante fórmulas explícitas:

$$f(x,y) = \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \qquad \text{y} \qquad f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Observación: $dom(f) = dom(g) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Sin embargo, aunque ninguna de estas funciones está definida en el origen, podemos analizar y comparar el comportamiento de ambas cuando las variables x e y se aproximan a 0 (es decir, cuando el punto (x,y) se acerca al origen). En efecto, las tablas siguientes muestran valores de $f(x,y)$ y de $g(x,y)$, con una aproximación de tres cifras decimales, para algunos puntos (x,y) cercanos a $(0,0)$:

TABLA 1 Valores de $f(x, y)$

$x \backslash y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
-0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
-0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

Aparentemente, los valores de f se aproximan a 1 cuando los puntos de su dominio se acercan a $(0,0)$.

EJERCICIO 1: Analizar qué ocurre con los valores de $f(x, y)$ mostrados en la tabla anterior en los casos particulares en que (x, y) se acerca a $(0,0)$ por el semieje x negativo, por el semieje y positivo y por la semirecta $y = x$ en el primer cuadrante.

TABLA 2 Valores de $g(x, y)$

$x \backslash y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
-0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
-0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0	−1.000	−1.000	−1.000		−1.000	−1.000	−1.000
0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

Aparentemente, los valores de g no se aproximan a un único número cuando los puntos de su dominio se acercan a $(0, 0)$.

EJERCICIO 2: Analizar qué ocurre con los valores de $g(x, y)$ mostrados en la tabla anterior en los casos particulares en que (x, y) se acerca a $(0, 0)$ por el semieje x negativo, por el semieje y positivo y por la semirecta $y = x$ en el primer cuadrante.

De ser correctas las conjeturas anteriores, diremos que

- "el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ es 1"

mientras que

- "$g(x,y)$ no tiene límite cuando (x,y) tiende a $(0,0)$"

y escribiremos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ no existe.}$$

En general, se utiliza la notación

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

para indicar que los valores de $f(x,y)$ se aproximan al número L cuando el punto (x,y) se acerca (tiende) al punto (a,b) por cualquier "trayectoria" contenida en el dominio de f. Formalmente:

Definición (LÍMITE)

Sea f una función real de dos variables cuyo dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ contiene puntos arbitrariamente cercanos al punto (a, b). Se dice que el **límite de** $f(x, y)$ **cuando** (x, y) **tiende a** (a, b) *es L, y se escribe*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

si para todos número $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que si $(x, y) \in D$ y $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$, entonces $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

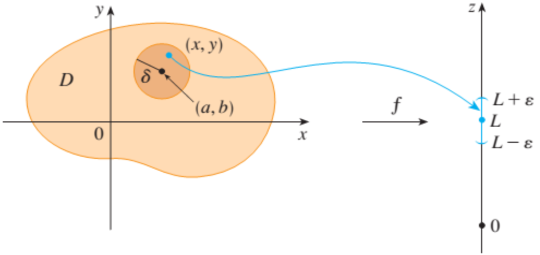
Otras notaciones usuales para el límite de la definición anterior son:

$$\lim_{x\to a,\ y\to b} f(x, y) = L \qquad \text{y} \qquad f(x, y) \to L \text{ cuando } (x, y) \to (a, b)$$

Observaciones:

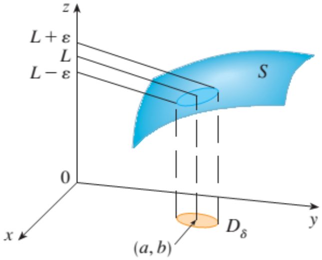
- $|f(x, y) - L|$ es la distancia entre los números $f(x, y)$ y L.
- $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ es la distancia entre los puntos (x, y) y (a, b)

Ilustración de la definición anterior mediante un diagrama de flechas:



Se puede hacer el valor $f(x,y)$ *arbitrariamente* "cercano" a L tomando el punto (x,y) *suficientemente* "cercano" a (a,b), pero diferente de (a,b).

Ilustración de la definición anterior mediante la gráfica de f:



Cuando el punto $(x,y,0)$ tiende a $(a,b,0)$ sobre el plano xy, el punto correspondiente $(x,y,f(x,y))$ en la gráfica S de f tiende a (a,b,L) (que puede o no estar en S).

EJEMPLO: Utilizaremos la definición anterior para demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Aquí $f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $(a,b) = (0,0)$ y $L = 0$.

Dpq: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$:

$$\left[(x,y) \in D \wedge 0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta\right] \Rightarrow \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$$

En efecto: Sea $\varepsilon > 0$ dado (fijo pero arbitrario). Si $(x,y) \neq (0,0)$ y

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta,$$

entonces

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} = 3|y|\frac{x^2}{x^2+y^2} \le 3|y| = 3\sqrt{y^2} \le 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta.$$

Por lo tanto, tomando $\delta = \varepsilon/3$ se obtiene la desigualdad requerida.

Leer también **EJEMPLO 2** (pág. 796).

Observación: La definición de límite se refiere sólo a la distancia entre (x, y) y (a, b), y no a la manera o dirección en que (x, y) "se acerca" a (a, b).

Por lo tanto: Si existe el límite, $f(x, y)$ debe aproximarse a un mismo valor L independientemente de cómo (x, y) se aproxime a (a, b).

Teorema (unicidad del límite)

El límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (a, b), si existe, es único.

Demostración: **Ejercicio para matemáticos.**

De lo anterior se desprende la siguiente condición suficiente (y práctica) para garantizar la no existencia de un límite.

Teorema (regla de las dos trayectorias)

Si $f(x,y) \to L_1$ *cuando* $(x,y) \to (a,b)$ *aproximándose por cierta trayectoria, y* $f(x,y) \to L_2$ *cuando* $(x,y) \to (a,b)$ *aproximándose por otra trayectoria, con* $L_1 \neq L_2$*, entonces* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ *no existe.*

No menos importantes, como herramientas teóricas y como reglas prácticas para calcular límites, resultan las siguientes propiedades.

Teorema (propiedades de los límites)

Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ *y* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$*, entonces*

(i) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y) + g(x,y)\right] = L + M$

(ii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y)g(x,y)\right] = LM$

(iii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right] = \frac{L}{M}$ *si* $M \neq 0$

(iv) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[cf(x,y)\right] = cL$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$

(v) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y) - g(x,y)\right] = L - M$

Demostración: **Ejercicio para matemáticos.**

EJEMPLO: Haciendo uso del teorema anterior, se puede demostrar que si c es cualquier número real y m y n son enteros no negativos, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} cx^m y^n = ca^m b^n$$

EJERCICIO 3: Demostrar lo afirmado en el ejemplo anterior.

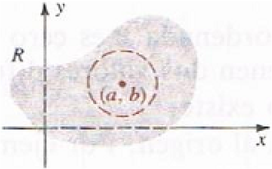
- Una función f de dos variables es una **función polinómica** si $f(x, y)$ se puede expresar como una suma de términos de la forma $cx^m y^n$, donde c es un número real y m y n son enteros no negativos. A dicha suma se le llama **polinomio** en las dos variables x e y.
- Una **función racional** de dos variables es un cociente de dos polinomios en dos variables.

Es fácil ver, como consecuencia de las propiedades de los límites y de lo enunciado en el último ejemplo, que (como ocurre en una variable) *los límites de las funciones polinómicas y racionales de dos variables pueden calcularse por sustitución* (de estas últimas, siempre que no se anule el denominador).

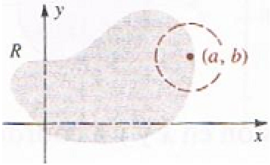
Leer **EJEMPLO 1** (pág 795) **y EJEMPLO 3** (pág. 797).

Sea R una región en el plano xy.

- (a, b) se denomina **punto interior** de R si existe un círculo con centro (a, b) (de radio no nulo) que contiene sólo puntos de R.
- (a, b) es un **punto en la frontera** de R si todo círculo con centro (a, b) (de radio no nulo) contiene puntos en R y puntos fuera de R.



punto interior de R



punto en la frontera de R

- Se dice que R es **cerrada** si contiene a todos sus puntos en la frontera.
- Se dice que R es **cerrada** si no contiene a ninguno de sus puntos en la frontera (todos sus puntos son interiores).
- Si R contiene algunos de sus puntos en la frontera pero no todos, no es cerrada ni abierta.

LÍMITES Y RESTRICCIÓN DE DOMINIO

Sea f una función real de dos variables cuyo dominio D contiene a todo punto (x, y) de la región R, excepto posiblemente a (a, b).

Supongamos que queremos analizar el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (a, b) sólo por "dentro" de R:

- Si (a, b) es un punto interior de R, basta con utilizar la definición de límite dada anteriormente (sin restricción de dominio).
- Si (a, b) es un punto en la frontera de R, dicha definición debe considerarse con la restricción adicional de que (x, y) se encuentre en R (no sólo en D y en el círculo de radio δ).

Definición (CONTINUIDAD)

Sea f una función real con dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Se dice que f **es continua en el punto** $(a, b) \in D$ *si*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

CONTINUIDAD Y RESTRICCIÓN DE DOMINIO

Supongamos ahora que $R \subseteq D$ y que queremos analizar la continuidad de f considerando sólo puntos de R:

- Si $(a, b) \in R$ es un punto interior de R, basta con utilizar la definición anterior (sin restricción de dominio).
- Si $(a, b) \in R$ es un punto en la frontera de R, el límite en dicha definición debe ser considerado con la restricción de dominio correspondiente.
- Diremos que f **es continua sobre la región** R si f es continua en todo punto interior de R y la restricción de f a R es continua en todo punto en la frontera de R.

Intuitivamente, f es continua sobre una región R contenida en su dominio si cuando se produce un "cambio pequeño" en el punto (x, y), "dentro" de R, el valor $f(x, y)$ también experimenta un "cambio pequeño".

Visualmente, f es continua sobre una región R contenida en su dominio si la parte de la gráfica de f correspondiente a R no tiene agujeros, saltos ni grietas.

Aplicando la definición de continuidad y las propiedades de los límites, podemos ver que *las sumas, diferencias, productos y cocientes de funciones continuas son asímismo continuas sobre sus dominios*.

EJEMPLOS:

- Las funciones simples $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$, $h(x, y) = c$ son continuas sobre $\mathbb{R}^2$. **EJERCICIO 4:** Demostrarlo.
- Las **funciones polinómicas** de dos variables son continuas sobre $\mathbb{R}^2$ (pues son sumas y productos de funciones como las del punto anterior).
- Las **funciones racionales** de dos variables son continuas sobre todo su dominio (donde no se anula el denominador).

Además tenemos, entre otras, la propiedad de uso frecuente establecida en el siguiente teorema.

Teorema (composición de funciones continuas)

Si una función f de dos variables es continua en (a, b) y una función g de una variable es continua en $f(a, b)$, entonces la función h definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ es continua en (a, b).

Leer **EJEMPLO 6** (pág.801).

La teoría desarrollada en esta clase se generaliza de manera análoga para funciones de tres o más variables. Leer DEFINICIÓN 16.5 y sus comentarios circundantes (pág. 799 y 800).