CALCULO 2: Ejercicios resueltos (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

Sección 16.2: Límites y Continuidad (Pág. 801): 1, 2, 3, 4, 6, 7, 11, 13, 15, 16, 19, 20

Al calcular un límite, debemos tener en cuenta algunas cosas:

- Si es una función polinómica, el límite lo obtengo directamente reemplazando.
- Si no es una función polinómica, y al reemplazar llego a una indeterminación, puedo intentar factorizar de manera de simplificar denominadores, y una vez hecho esto, sí reemplazar y hallar el valor del límite.
- Si al factorizar no logro solucionar el problema, es decir que continúo teniendo indeterminaciones, lo mejor es acercarme al punto en cuestión por distintas trayectorias. Si dos trayectorias me llevan a distintos resultados, el límite no existe. Si varios caminos me llevan al mismo resultado, debo demostrar formalmente que ese es el límite.

Ejercicio: Dadas las funciones, calcular los siguientes límites, si existen:

a) $f(x,y) = \frac{x^4-4y^4}{x^2+2y^2}$; $\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Debemos hallar, si existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4y^4}{x^2+2y^2}$$

Observemos que si reemplazamos x e y por 0 llegamos a una indeterminación "cero sobre cero". Observemos también, que el numerador puede ser factorizado como una diferencia de cuadrados: $x^4-4y^4 = (x^2-2y^2)(x^2+2y^2)$ entonces podemos simplificar y luego reemplazar x e y por 0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4y^4}{x^2+2y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-2y^2)(x^2+2y^2)}{(x^2+2y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2-2y^2 = 0$$

Por lo tanto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4y^4}{x^2+2y^2} = 0$

b) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$; $\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Debemos hallar, si existe: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Observemos que no podemos reemplazar directamente porque llegamos a una indeterminación. Tampoco hay manera de factorizar que nos pueda ayudar. Probemos tomando distintas trayectorias, que pasen por el (0,0):

- Si nos acercamos al $(0,0)$ por el eje x, esto es, por la recta $y = 0$, tenemos $f(x, 0) = \frac{0}{x^2} = 0$

Y por lo tanto $f(x, y) \to 0$ cuando $(x, y) \to (0,0)$ por el eje x.

- Si nos acercamos al $(0,0)$ por el eje y, esto es, por la recta $x = 0$, tenemos $f(0, y) = \frac{0}{y^2} = 0$

Y por lo tanto $f(x, y) \to 0$ cuando $(x, y) \to (0,0)$ por el eje y.

- Si nos acercamos al (0,0) por la recta $y = x$ tenemos $f(x, x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

Y por lo tanto $f(x, y) \to \frac{1}{2}$ cuando $(x, y) \to (0,0)$ por la recta $y = x$.

Así, como trayectorias distintas conducen a resultados distintos, concluimos que el límite pedido no existe.

Observar que aunque las dos primeras trayectorias que tomamos daban el mismo valor, no fue ese el valor del límite, es más, no existe el límite. Siempre es conveniente probar con una tercera o cuarta trayectoria.