UNIDAD 2

DERIVADAS PARCIALES

Bibliografía principal:

Cálculo con Geometría Analítica (2da Edición)

Autor:

Earl Swokowski

https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

En CÁLCULO I / ANÁLISIS MATEMÁTICO I se han estudiado las funciones reales (esto es, con valores en $\mathbb{R}$) que tienen sólo una variable independiente (también real).

En este capítulo (CAPÍTULO 16) se introducen las funciones reales de más de una variable independiente (también reales) y se generaliza el concepto de derivada para este caso.

Esto tiene numerosas aplicaciones tales como:

- cálculo de razones de cambio
- obtención de valores máximos y mínimos
- aproximaciones usando diferenciales

No son pocos los problemas que requieren tener en cuenta varias variables independientes.

Supongamos, por ejemplo, que deseamos calcular el *volumen* V de un cilindro circular. Dicho volumen depende de dos dimensiones independientes entre sí:

- el *radio* r
- la *altura* h

En efecto,

$$V = \pi r^2 h$$

Por lo tanto, podemos considerar a V como una función f de las dos variables r y h, o bien, del par (r, h), y escribir

$$V = f(r, h)$$

Consideremos ahora la *temperatura* T de un punto P en el espacio.
En un instante dado (fijo), el valor de T dependerá de la "ubicación" del punto P. Si sabemos que P se encuentra sobre la superficie terrestre, bastará con especificar dos números reales independientes entre sí:

- la *longitud* x
- la *latitud* y

De este modo, podemos decir que T es una función f de las dos variables x e y, o bien, del par (x, y), y escribir: $T = f(x, y)$.
Si, en el mismo instante dado, pudiera ocurrir que el punto P cuya temperatura deseamos conocer no se encontrase en la superficie terrestre (al nivel del mar), sería necesario especificar un tercer número real independiente de los dos antes mencionados:

- la *altitud* z

y podríamos ver a T como una función f de tres variables: $T = f(x, y, z)$.
Por último, si resultara también de interés la temperatura de P en diferentes instantes, se incorporaría a nuestro problema una nueva variable:

- el *tiempo* t

y T resultaría en una función f de cuatro variables: $T = f(x, y, z, t)$.

Definición (16.1)

Una **función real** f **de dos variables** *(reales) es una correspondencia que asocia a cada par* (x, y) *en cierto subconjunto* D *de* $\mathbb{R}^2$ *un único número real que se denota por* $f(x, y)$*.*

Relativo a la definición anterior:

- El conjunto D se llama **dominio** *de* f.
- El número $f(x, y)$ se llama "**imagen de** (x, y) **bajo** f" o "**valor de** f **en** (x, y)".
- El conjunto de las imágenes bajo f de todos los pares (x, y) en D (simbólicamente: $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$) se llama **contradominio** o **rango** de f.
- Si se escribe $z = f(x, y)$, entonces x e y son las **variables independientes** y z es la **variable dependiente**, y se dice que "z (o f) es una **función de** x **e** y".

Una función f de dos variables se puede representar de varias maneras.

- *Algebraicamente*: por medio de una **fórmula explícita**.

  En este caso, cuando no se especifica dominio alguno, se entiende que éste consiste de todos los pares (x, y) en $\mathbb{R}^2$ para los cuales dicha fórmula tiene sentido en $\mathbb{R}$. Leer EJEMPLO 1 (pág. 787).

- *Numéricamente*: por medio de una **tabla de valores**.

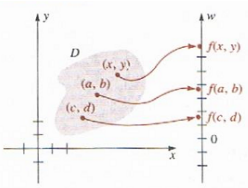
  EJEMPLO: La siguiente tabla muestra el índice de sensación térmica S como una función de la temperatura real T y de la rapidez del viento v. De este modo, podemos escribir $S = f(T, v)$. En particular, por ejemplo, $f(-5, 50) = -15$ y se interpretará que cuando la temperatura real es de $5^\circ C$ y el viento se desplaza a 50 km/h, subjetivamente se sentirá tanto frío como si la temperatura fuera de -15$^\circ C$ sin viento.

Rapidez del viento (km/h)

Temperatura real (°C)

T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52

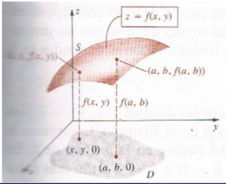
- *Visualmente*: mediante un diagrama de flechas, una gráfica o curvas de nivel.
  - En un **diagrama de flechas** el dominio se representa por puntos en el plano xy, y el contradominio, por puntos en la recta real, la cual se suele mostrar como un tercer eje (w) al costado de dicho plano.



Esta representación resulta más adecuada cuando el dominio de f es un conjunto finito o cuando sólo interesa visualizar su comportamiento en unos "pocos" puntos.

Ver FIGURA 16.2 en EJEMPLO 1 (p. 787).

  - La **gráfica** de f es la representación, en un sistema de coordenadas rectangulares tridimensional, de todos los puntos (x, y, z) tales que (x, y) pertenece al dominio de f y $z = f(x, y)$.



Dicha gráfica es, en general, una superficie S: la superficie de ecuación $z = f(x, y)$.

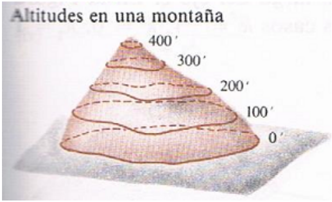
Ver EJEMPLO 2 y FIGURA 16.5 (p. 788).

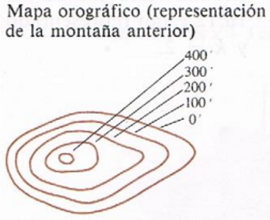
- Las **curvas de nivel** de f son las gráficas en el plano xy de las ecuaciones de la forma $f(x, y) = k$, donde k es una constante en el contradominio de f. Leer EJEMPLO 3 (p. 788). Comparar FIGURAS 16.5 y 16.6.

  Observaciones:

  - Cuando un punto (x, y) en el dominio de f "se mueve" sobre una misma curva de nivel, los valores $f(x, y)$ de la función no cambian, (por lo tanto, tampoco cambia la "altura" o el "nivel" correspondiente a estos puntos en la gráfica de f)
  - La curva de nivel con ecuación $f(x, y) = k$ no es otra cosa que la traza de la gráfica de f en el plano horizontal $z = k$, proyectada en el plano xy.
  - Dibujando varias curvas de nivel (en el plano xy) y trasladando o imaginando cada una de ellas a la altura indicada por la constante correspondiente, nos podemos formar una imagen mental de la constante correspondiente. Para ello, generalmente resulta conveniente tomar valores equidistantes de k.

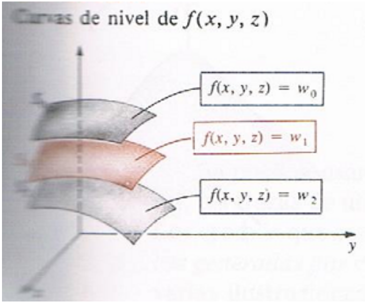
Las curvas de nivel se usan frecuentemente en la elaboración de mapas orográficos o planos de configuración, así como de mapas hidrográficos y mapas meteorológicos o climáticos, etc. EJEMPLO: Supongamos que $f(x, y)$ representa la altitud (en metros) en un punto (x, y) con coordenadas geográficas x (latitud) e y (longitud). Las siguientes figuras representan una montaña y "sus curvas de nivel" correspondientes a las altitudes de 0, 100, 200, 300 y 400 metros.





La teoría desarrollada en esta sección se generaliza de manera completamente análoga para funciones de tres o más variables. Sin embargo, debemos tener en cuenta algunas consideraciones:

- Si f es una función de tres variables, digamos x, y y z, las gráficas (tridimensionales) de las ecuaciones de la forma $f(x, y, z) = k$ con k en el contradominio de f, se llaman **superficies de nivel** de f.



- No se puede esbozar una "gráfica" (en el sentido antes definido) de funciones de tres o más variables (ya que nuestro espacio es tridimensional y esto implicaría "dibujar" en cuatro dimensiones o más).