CALCULO 2: Ejercicios resueltos (Se presentan algunos ejercicios tipo/modelo para ser usados de guía en la resolución de los ejercicios propuestos)

Sección 16.1: Funciones de varias variables

(Pág. 792): 3, 4, 7, 14, 15, 18, 22, 23, 27, 29, 33

<u>Ejercicio 3</u>: Determinar dominio de f, y el valor de f en los puntos indicados:

Recordemos que el dominio de una función de dos variables $f(x,y)$ son todos los pares $(x,y) \in R^2$ para los cuáles ésta está definida.

$f(u,v) = \frac{uv}{u-2v}$; $(2,3)$

En este caso, vemos que tendremos problemas cuando el denominador se haga cero. Es decir, tenemos que encontrar el o los valores que anulen el denominador para excluir estos del dominio.

$u - 2v = 0 \;\rightarrow\; u = 2v \;\rightarrow\; \frac{1}{2}u = v$

Esto indica que los puntos que estén sobre la recta $\frac{1}{2}u = v$ anularán el denominador, y por lo tanto no serán parte del dominio de la función.

Concluimos entonces que $Dom(f) = \left\{(u,v) \in R^2 / \frac{1}{2}u \neq v\right\}$.

Para hallar $f(2,3)$ reemplazamos u por 2 y v por 3: $f(2,3) = \frac{2\,.3}{2-2\,.3} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

<u>Ejercicio 5:</u> Determinar dominio de f, y el valor de f en los puntos indicados:

$f(x,y,z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$

En este caso, tenemos una función de tres variables. Al tener una raíz cuadrada, el radicando debe ser mayor o igual a cero; para que esto suceda:

$25 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \;\rightarrow\; 25 \geq x^2 + y^2 + z^2$

$x^2 + y^2 + z^2 = 25$ es una esfera de centro en el origen de coordenadas y radio 5. Al tener el signo "menor o igual" hacemos referencia al borde y parte interior de la esfera. Es decir, el dominio de $f(x,y,z)$ serán todas las ternas (x,y,z) tales que $25 \geq x^2 + y^2 + z^2$, o sea, solo la esfera dicha y su interior.

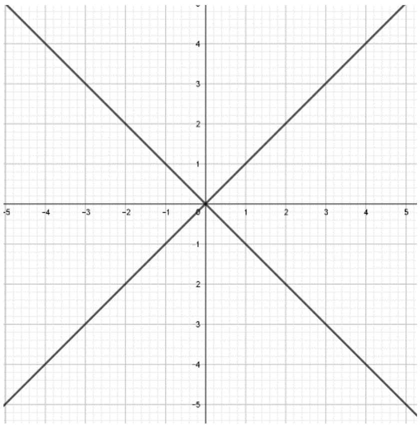
Por lo tanto $Dom(f) = \{(x,y,z) \in R^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}$

<u>Ejercicio 13:</u> Trace algunas curvas de nivel de $f(x,y) = y^2 - x^2$

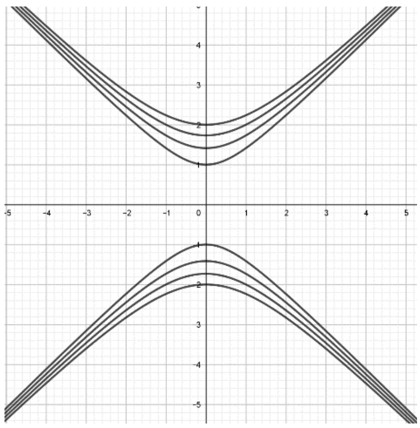
Las curvas de nivel son las gráficas de ecuaciones de la forma $f(x,y) = k$ para distintos valores de k.

Calculemos y grafiquemos algunas de ellas:

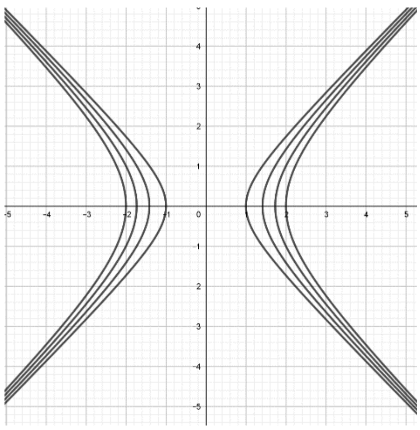
Si $k = 0$ tenemos $y^2 - x^2 = 0$. Despejando encontramos las rectas $y = \pm x$.



Si $k = 1$ tenemos $y^2 - x^2 = 1$ lo cuál es una hipérbola cuyas ramas no tocan al eje x. Y en general, si $k > 0$ obtendremos distintas hipérbolas igualmente orientadas:



Si $k = -1$ tenemos $y^2 - x^2 = -1 \;\; \rightarrow \;\; x^2 - y^2 = 1$ lo cuál es una hipérbola cuyas ramas no tocan al eje y. Y en general, si $k < 0$ obtendremos distintas hipérbolas igualmente orientadas:



Al juntar todo en un solo sistema de ejes obtenemos las curvas de nivel pedidas: